



Wyższa Szkoła Ekonomii
i Informatyki w Krakowie



2022

ANNA DEREŃ
GABRIELA MALIK
MARCIN SZYDŁOWSKI

Badania operacyjne

Wybrane metody i zadania

Podręcznik
dla studentów
kierunków
ekonomicznych
i technicznych



ANNA DEREŃ

GABRIELA MALIK

MARCIN SZYDŁOWSKI

Badania operacyjne

Wybrane metody i zadania

Podręcznik
dla studentów
kierunków
ekonomicznych
i technicznych



Wyższa Szkoła Ekonomii
i Informatyki w Krakowie

Kraków 2022

Recenzent:

Prof. dr hab. inż. Witold Byrski

Redakcja:

mgr Małgorzata Żmudzka-Kosała

Projekt okładki:

Piotr Olszowski

Skład:

Arkadiusz Burtan

Adres Redakcji:

Wydawnictwo Naukowe Wyższej Szkoły Ekonomii i Informatyki w Krakowie

ul. św. Filipa 17, 31-150 Kraków

tel. 12 431 18 90; fax: 12 431 18 82

© Copyright by Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki w Krakowie

© Copyright by Autorzy

Kraków 2022

Printed in Poland

ISBN 978-83-954664-1-0

Podziękowanie

*Szczególne wyrazy wdzięczności dla
Pana Profesora dr hab. Jerzego Dąbkowskiego
za inspirację do napisania tego podręcznika,
za wsparcie merytoryczne oraz za nieocenioną pomoc.*

Autorzy

SPIS TREŚCI

Wstęp	7
1. Czym są badania operacyjne – wprowadzenie do tematu	9
2. Programowanie liniowe – formułowanie modelu i metoda geometryczna	19
3. Programowanie liniowe z wykorzystaniem narzędzia Solver	27
4. Programowanie dyskretne, całkowitoliczbowe i stochastyczne – podstawy teoretyczne	35
5. Programowanie liniowe	37
5.1. Definicje i oznaczenia	37
5.2. Metoda simpleks	44
5.3. Pierwsze rozwiązanie bazowe	55
5.4. Dualność w programowaniu liniowym	57
5.5. Pytania i ćwiczenia	62
6. Programowanie ilorazowe	69
6.1. Wprowadzenie	69
6.2. Sformułowanie modelu matematycznego zadania.. . . .	69
6.3. Programowanie ilorazowe w przykładach	70
6.4. Pytania i ćwiczenia	75
7. Programowanie sieciowe	81
7.1. Podstawowe pojęcia teorii grafów	81
7.2. Typowe zagadnienia rozwiązywane przy pomocy grafów	83
7.3. Pytania i ćwiczenia	94
8. Przykłady zastosowań	101
8.1. Zagadnienia transportowe	101
8.2. Zagadnienie mieszanki	104
8.3. Kontrola zapasów i planowanie produkcji	104
8.4. Zagadnienie przepływów międzygałęziowych	106
8.5. Analiza drogi krytycznej – metoda PERT	108
9. Programy komputerowe w rozwiązywaniu zadań optymalizacji	117
9.1. Program Lp_solve	118
9.2. Pakiet Lindo	119
9.3. Oprogramowanie R	121

10.	Wybrane projekty studentów WSEI	129
10.1.	Zagadnienie mieszanki	129
	1. Sformułowanie problemu:	129
	2. Cel naszego zadania:	129
	3. Rozwiązanie problemu:	130
	a) metoda graficzna:	130
	b) metoda Simpleks	131
	c) przy pomocy programu Excel.	135
	4. Postać kanoniczna zadania:	137
	5. Postać dualna zadania:	139
	6. Interpretacja wyników:	140
10.2.	Maksymalizacja zysku	140
	1. Cel projektu	140
	2. Zadanie praktyczne.	141
	2.1. Dane potrzebne do opracowania zadania.. . . .	141
	2.2. Konstrukcja zadania	141
	3. Rozwiązanie zadania w postaci standardowej za pomocą narzędzia „solver”	143
	4. Przedstawienie rozwiązania zadania metodą graficzną	147
10.3.	Programowanie sieciowe	148
	1. Cel projektu.. . . .	148
	1.1 Sformułowanie problemu.	148
	1.2. Metoda Forda.	150
	1.3. Interpretacja.	151
	2. Model matematyczny	152
	2.1.Wyznaczenie macierzy połączeń	152
	3. Rozwiązanie zadania	154
	3.1 Rozwiązanie zadania za pomocą Solvera w programie Microsoft Excel	154
	3.2 Rozwiązanie zadania za pomocą programu lp_solve	155
10.4.	Analiza drogi krytycznej – metoda PERT	162
	1. Cel projektu	162
	2. Sformułowanie modelu, zebranie danych	162
	3. Konstrukcja sieci czynności:	164
	4. Poszukiwanie drogi krytycznej	166
	5. Analiza czasowa	166
	6. Wykres Gantta	168

WSTĘP

Zasadniczym celem podręcznika jest przekazanie Czytelnikowi wybranych powszechnie znanych i używanych zastosowań modeli matematycznych oraz metod obliczeniowych badań operacyjnych.

Zaprezentowany materiał został podzielony na 10 rozdziałów, spośród których 7 obejmuje wybrane zagadnienia teorii optymalizacji. **Rozdział pierwszy** wprowadza Czytelnika w tematykę badań operacyjnych. **Rozdział drugi i rozdział trzeci** poświęcono zagadnieniu teorii programowania liniowego, zwracając szczególną uwagę na formułowanie modelu, rozwiązywanie zagadnień metodą geometryczną oraz z wykorzystaniem narzędzia pakietu MS Office Solver. W **rozdziale czwartym** zamieszczono podstawy teoretyczne dotyczące programowania dyskretnego, całkowitoliczbowego oraz stochastycznego. Kluczowym elementem **rozdziału piątego** jest prezentacja metody simpleks rozwiązywania zagadnień programowania liniowego oraz dualność w programowaniu liniowym. **Rozdział szósty** przedstawia zagadnienia dotyczące programowania ilorazowego, skupiając się na znalezieniu rozwiązania kompromisowego dla sformułowanych kryteriów. **Rozdział siódmy** poświęcony został modelom przedsięwzięć sieciowych w oparciu o teorię grafów.

Każdy z zaprezentowanych powyżej rozdziałów zakończony jest zestawem pytań, ćwiczeń i zadań do samodzielnego rozwiązania wraz z odpowiedziami.

W **rozdziale ósmym** przedstawiono przykłady zastosowań wybranych teorii, zwracając szczególną uwagę na zastosowanie teorii badań operacyjnych dla: zagadnienia transportowego, zagadnienia mieszanki, kontroli zapasów i planowania produkcji, przepływów międzygałęziowych oraz analizy drogi krytycznej metodą PERT.

Rozdział dziewiąty ma za zadanie zapoznanie Czytelnika z możliwościami wykorzystania programów komputerowych wspomagających rozwiązywanie zadań optymalizacji. Szczególną uwagę zwrócono na zastosowanie programu LP_SOLVE, pakietu LINDO oraz oprogramowania R.

Rozdział dziesiąty zawiera najciekawsze projekty studentów Wyższej Szkoły Ekonomii i Informatyki w Krakowie, realizowane w procesie kształcenia przedmiotu Badania operacyjne.

Zdaniem autorów zaprezentowany w niniejszym podręczniku zakres tematyczny wybranych elementów Badań operacyjnych może stanowić doskonałe wprowadzenie do korzystania ze wskazanych metod ilościowych w praktyce tj. w ekonomii, finansach czy w zarządzaniu.

1. CZYM SĄ BADANIA OPERACYJNE – WPROWADZENIE DO TEMATU

Badania operacyjne stanowią rozległą dziedzinę zastosowań matematyki do analizy i sterowania skomplikowanymi układami produkcyjnymi, organizacyjnymi czy strukturami ekonomicznymi. Rozwój badań w tej dziedzinie nastąpił lawinowo w ciągu ostatnich dziesięcioleci w wyniku zainwestowania dużych środków finansowych, jak również ogromnego postępu techniki obliczeniowej związanej z użyciem komputerów. Nadmienić należy, że inwestycje włożone w badania operacyjne nie były i bynajmniej nie są bezinteresowne. W historii wydatków na naukę, nakłady włożone na badania operacyjne okazywały się najczęściej bardzo rentownymi.

W literaturze spotkać można wiele przykładów intratnych zysków, jakie osiągnięte zostały przez poszczególne przedsiębiorstwa w wyniku zastosowania badań operacyjnych. Usprawnienie organizacji pracy, wybieranie optymalnych wariantów produkcji, podejmowanie najlepszych, z punktu widzenia interesów zakładu, decyzji przez jego kierownictwo, „naukowe” harmonogramowanie robót – wszystko to są przykłady zastosowania badań operacyjnych w praktyce. Elementy badań operacyjnych wchodzi dziś do programu szkolenia kadr kierowniczych we wszystkich krajach świata i stanowią nieodłączną cechę każdej działalności produkcyjnej na większą skalę.

Zakres tematyki określonej wspólnym mianem badań operacyjnych jest bardzo szeroki i obejmuje m.in.:

- tzw. programowanie matematyczne (nie mylić z programowaniem komputerów),
- teorię gier,
- teorię masowej obsługi,
- wyspecjalizowane działy statystyki matematycznej.

W dalszej części niniejszej książki przedstawione zostaną wybrane zagadnienia z dziedziny badań operacyjnych. Sposób prezentacji i rozłożenie akcentów wynikają z intencji jak najsilniejszego związku z wykorzystaniem komputerów, co wiąże się ze zdobyciem umiejętności stawiania zagadnień i formułowania ich w postaci sformalizowanej, wymaganej do zastosowania odpowiedniego algorytmu obliczeń. W związku z tym mniejszy nacisk położono na kompletność metod rozwiązywania, dowody twierdzeń i precyzyjne formułowanie warunków istnienia rozwiązań. Bardziej pobieżnie omówione są same algorytmy rozwiązywania poszczególnych zagadnień. Większość opisanych w literaturze algorytmów rozwiązywania zadań z dziedziny badań operacyjnych jest opracowana w postaci gotowych programów komputerowych, a zadaniem przedmiotu jest zdobycie umiejętności korzy-

stania z tych programów. Typowym zagadnieniem, w którym metody badań operacyjnych mogą być użyte, jest *optymalizacja* pewnego systemu

Przez *optymalizację* rozumie się ustalenie charakterystyk systemu w taki sposób, aby działał on prawidłowo, zaś pewna funkcja zależna od charakterystyk systemu osiągała wartość najmniejszą lub największą.

Z punktu widzenia matematyki jest to zadanie znalezienia *ekstremum warunkowego*. Funkcja, której ekstremum jest poszukiwane nazywa się *funkcją celu, funkcją kryterialną* lub *wskaźnikiem jakości*, zaś warunki ograniczające muszą być takie, aby system działał prawidłowo. Najczęściej warunki ograniczające mają postać równań i nierówności algebraicznych, a ich zbiór nazywany bywa *modelem matematycznym systemu*.

Model matematyczny odzwierciedla w pewien sposób i najczęściej z pewnymi uproszczeniami strukturę optymalizowanego systemu. Czasami łatwo jest uzyskać układ ograniczeń od razu w postaci równań lub nierówności, a niekiedy dla uzyskania modelu matematycznego konieczne jest używanie innych technik jak np. techniki grafów. Model matematyczny układu zawiera informacje o nim w formie samej postaci równań oraz w postaci szeregu danych liczbowych, charakteryzujących badany układ*, nazywanych jego *parametrami strukturalnymi*.

Rozwiązanie problemu optymalizacji podzielić można na cztery etapy.

1. Obserwację układu.
2. Sformułowanie modelu.
3. Znalezienie rozwiązania optymalnego.
4. Wdrożenie rozwiązania optymalnego do praktyki.

W dyskusji tych etapów ważne jest rozróżnienie roli, jaką w ich realizacji odgrywa praktyk kierujący przedsięwzięciem, we współpracy z teoretykiem, który formalnie rozwiązuje zadanie i „dokonuje tłumaczenia” faktów i wielkości rzeczywistych na liczby i formuły matematyczne i vice versa. Nie jest możliwe osiągnięcie sukcesu, jeśli tych dwoje ludzi (rozumianych symbolicznie) nie będzie w stanie się porozumieć i współpracować ze sobą. Dlatego elementy metod optymalizacji muszą być znane praktykom – menedżerom, a teoretycy optymalizacji muszą rozumieć systemy, które optymalizują.

Obserwacja układu ma na celu wyznaczenie parametrów strukturalnych modelu (danych liczbowych o układzie) oraz prześledzenie wzajemnych powiązań pomiędzy elementami układu wewnątrz niego, jak i jego oddziaływania z innymi układami. Na podstawie obserwacji można sformułować model

* Na określenie optymalizowanego fragmentu rzeczywistości używane będą zamiennie terminy system lub układ.

matematyczny systemu i podać postać funkcji celu. Znalezienie rozwiązania optymalnego sprowadza się wówczas do matematycznego zadania znalezienia ekstremum warunkowego funkcji wielu zmiennych.

Dla praktyka, zatrudnionego w produkcji, podstawowe znaczenie mają dwa pierwsze elementy procesu optymalizacji, tzn. obserwacja kierowanego przez niego układu produkcyjnego, stawianie mu zadań i wytyczanie celów tak, aby osiągnąć najlepsze efekty. Jeśli nie chce on podejmować decyzji w tym względzie w oparciu jedynie o swoje własne domysły lub intuicję, to powinien posiłkować wiedzę o formułowaniu **modelu matematycznego** kierowanego przez siebie zakładu (bądź pewnych jego elementów) i decyzję podejmować na podstawie rozwiązania optymalnego.

Należy tu podkreślić jeden ważny moment. Bardzo często okazuje się, że rozwiązania optymalnego nie można wcielić w życie w danej chwili, ponieważ przyniosłoby to doraźne straty, nie uwzględnione w modelu matematycznym. Można jednak tak zaplanować zmiany strukturalne układu, aby stopniowo dążyć do wprowadzenia struktury optymalnej. Często nie rozpatruje się tych możliwości, gdyż przeważnie przeczą one tzw. „zdrowemu rozsądkowi” i nie są w ogóle zauważane. Zastosowanie badań operacyjnych ujawnia te możliwości.

Trzeci etap procesu optymalizacji jest domeną zawodowych matematyków, którzy przygotowują najefektywniejsze algorytmy dla rozwiązania zadania określonego typu. Głównym motywem poruszonym w tej książce będzie etap drugi, tzn. formułowanie modelu matematycznego. Obserwacja układu zawiera pewne wyspecjalizowane działy charakterystyczne dla badań operacyjnych, najczęściej jednak posługuje się standardowymi metodami statystyki matematycznej.

Uwaga! Znalezienie rozwiązania optymalnego nie jest równoznaczne z akceptacją tego rozwiązania. W zasadzie należałoby tu wprowadzić dodatkowy etap analizy i wdrażania rozwiązań, w którym rola praktyków jest decydująca.

W wielu przypadkach problemów optymalizacji, obok rozwiązania optymalnego podać można rodzinę tzw. **rozwiązań suboptymalnych**.

Podczas analizy otrzymanych rozwiązań, w trakcie której bierze się pod uwagę wszystkie aspekty zagadnienia, często okazuje się, że najkorzystniej jest wcielać w życie jedno z rozwiązań suboptymalnych. Oczywiście jest w tym przypadku rola praktyka, który podejmując decyzję o wyborze rozwiązania, ponosi także ryzyko związane z realizacją projektu.

Przez optymalizację rozumie się ustalenie charakterystyk systemu w taki sposób, aby działał on prawidłowo, zaś pewna funkcja zależna od charakterystyk systemu osiągała wartość najmniejszą lub największą.

Z punktu widzenia matematyki jest to zadanie znalezienia ekstremum warunkowego. Funkcja, której ekstremum jest poszukiwane nazywa się funkcją celu, **funkcją kryterialną** lub **wskaźnikiem jakości**, zaś warunki ograniczające muszą być takie, aby system działał prawidłowo. Najczęściej warunki ograniczające mają postać równań i nierówności algebraicznych, a ich zbiór nazywany bywa **modelem matematycznym systemu**.

Prosty przykład.

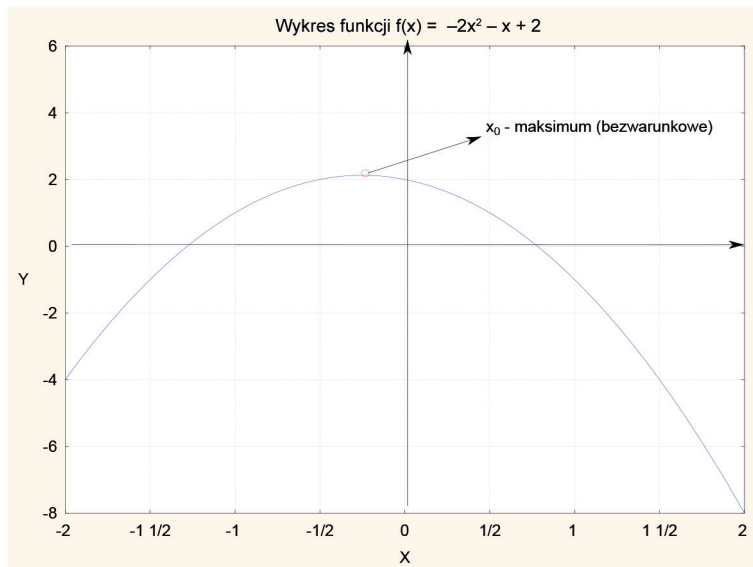
1. Dana jest kwadratowa funkcja celu jednej zmiennej

$f(x) = -2x^2 - x + 2$ i warunki ograniczające: $x \in (-\infty, +\infty)$, co praktycznie oznacza, że przykład jest bez ograniczeń.

Problemem optymalizacji jest maksymalizacja funkcji $f(x)$, co będzie zapisywane: $f(x) \rightarrow \max$.

Zadanie optymalizacji polega zatem na rozwiązaniu zadania: znaleźć maksimum funkcji $f(x) = -2x^2 - x + 2$. W celu znalezienia rozwiązania można obliczyć pochodną, przyrównać ją do zera, rozwiązać powstałe równanie i na koniec zbadać czy spełniony jest warunek dostateczny istnienia ekstremum:

$f'(x) = -4x - 1$, $-4x - 1 = 0$, $x_0 = -\frac{1}{4}$, gdzie x_0 oznacza punkt, w którym osiągnięte jest maksimum funkcji. Warunek dostateczny nie będzie zbadany, zamiast tego zostanie zaprezentowany wykres funkcji $f(x)$.



Rys. 1. Wykres kwadratowej funkcji celu i punkt optymalny

2. Dana jest ta sama funkcja celu:

$$f(x) = -2x^2 - x + 2$$

i warunki ograniczające:

$$x \geq 0,$$

$$x \leq 1.$$

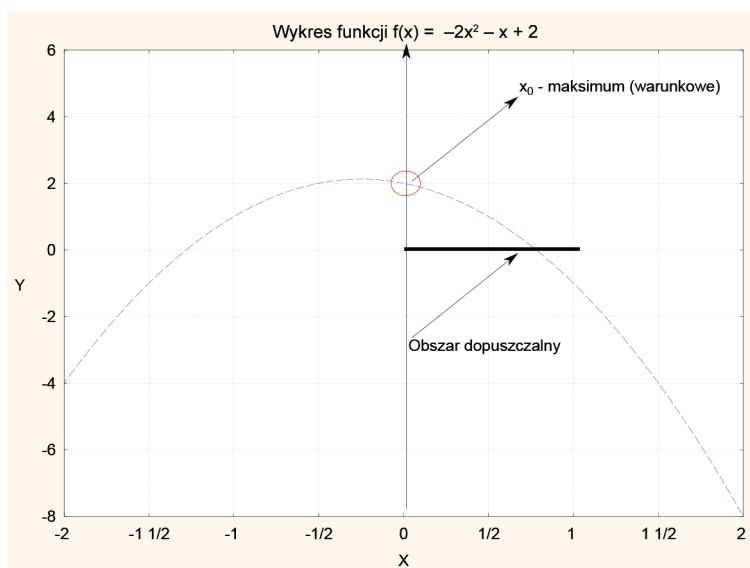
Zadaniem optymalizacji jest, podobnie jak poprzednio: $f(x) \rightarrow \max$.

Zadanie można zatem sformułować tak:

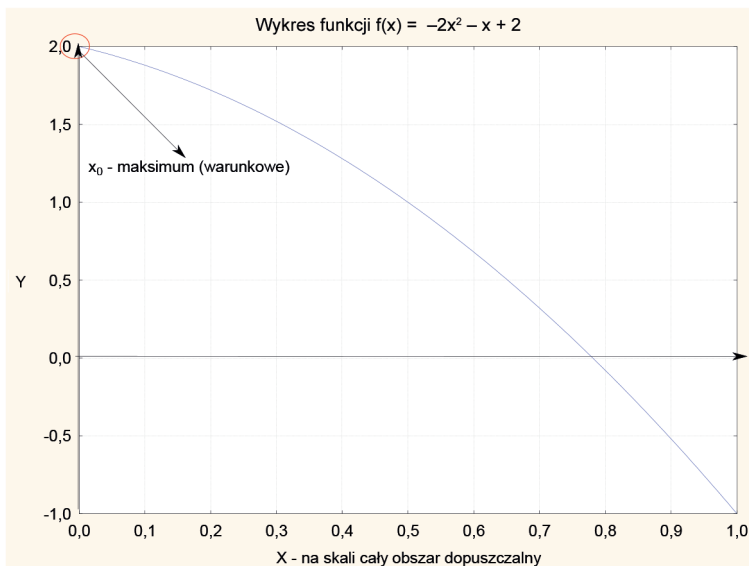
Znaleźć x_0 , takie, że $f(x_0) \rightarrow \max$,

W obszarze dopuszczalnym $x \in [0, 1]$

Tym razem warunki konieczne na istnienie ekstremum nie mogą być zastosowane i zadanie zostanie rozwiązane graficznie jak pokazano to na rysunkach 2 i 3.



Rys. 2. Ekstremum warunkowe ograniczone do przedziału $[0,1]$



Rys. 3. Przedział ograniczony $[0,1]$ w którym jest badany system

Widać, że tym razem maksimum (ogólnie ekstremum) osiągnięte będzie na końcu przedziału dopuszczalnego (w ogólniejszym sformułowaniu – na brzegu obszaru dopuszczalnego). W przypadku funkcji kwadratowej, takiej jak na rysunku 1, maksimum mogłoby wystąpić wewnątrz obszaru dopuszczalnego wtedy, gdyby punkt ekstremalny funkcji (na rys.1) leżał wewnątrz tego obszaru. Najczęściej jednak punkt optymalny leży na brzegu obszaru dopuszczalnego.

3. Dana jest liniowa funkcja celu:

$f(x) = 2x$ i warunki ograniczające:

$x \geq -\infty$,

$x \geq \infty$ czyli, tak jak w pierwszym punkcie przykładu, $x \in (-\infty, +\infty)$, a więc bez ograniczeń.

Zadaniem jest, podobnie jak poprzednio znalezienie $x: f(x) \rightarrow \max$.

Pochodna funkcji $f(x)$ wynosi $f'(x) = 2$ i nigdy nie jest równa zero, więc ekstremum nie istnieje (maksymalna wartość funkcji wynosi $+\infty$ dla $x = +\infty$).

4. Dana jest ta sama liniowa funkcja celu:

$f(x) = 2x$ i warunki ograniczające:

$x \geq 0$,

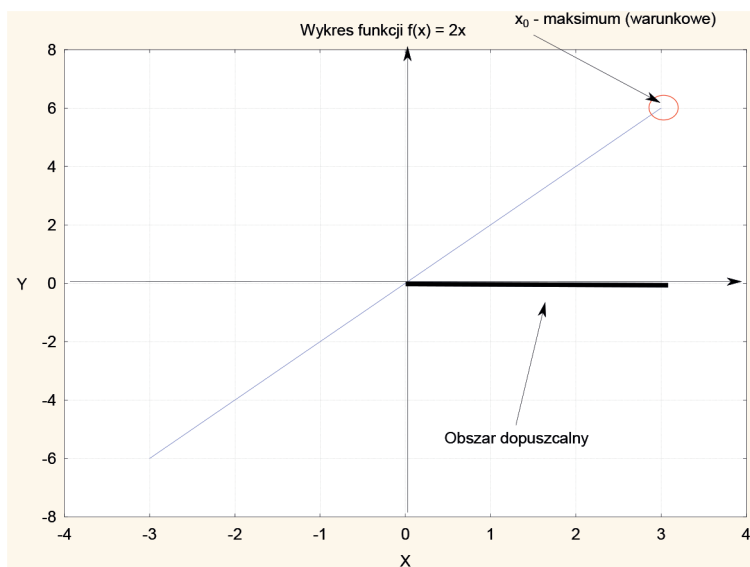
$x \geq 3$ czyli, obszar dopuszczalny: $x \in [0,3]$.

Zadaniem jest, podobnie jak poprzednio: $f(x) \rightarrow \max$.

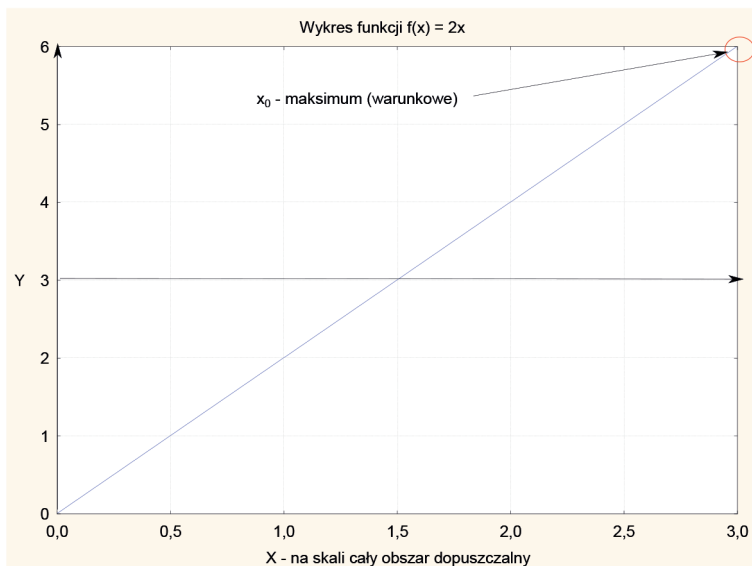
Należy zatem rozwiązać problem optymalizacji:

$f(x) \rightarrow \max$, dla $x \in [0,3]$.

Podobnie jak w punkcie 2, rozwiązanie zostanie przedstawione graficznie. Wynik przedstawiają rysunki 4 i 5. Widać, że rozwiązaniem optymalnym jest $x_0 = 3$ (a więc wartość z brzegu obszaru dopuszczalnego).



Rys. 4. Wykres liniowej funkcji celu, zaznaczony obszar dopuszczalny oraz maksimum warunkowe $x_0 = 3$



Rys. 5. Przedział ograniczony $[0,3]$ w którym jest badany system

Powyższy przykład można rozwiązać metodą zadania dualnego. Zadanie dualne będzie opisane bardziej szczegółowo w rozdziale piątym, tutaj zostanie przedstawione jedynie zastosowanie.

Zadanie pierwotne:

$$f(x) = 2x \rightarrow \max$$

przy warunkach:

$x \geq 3, -x \geq 0$, (ten warunek został zmodyfikowany, aby obie nierówności miały ten sam kierunek).

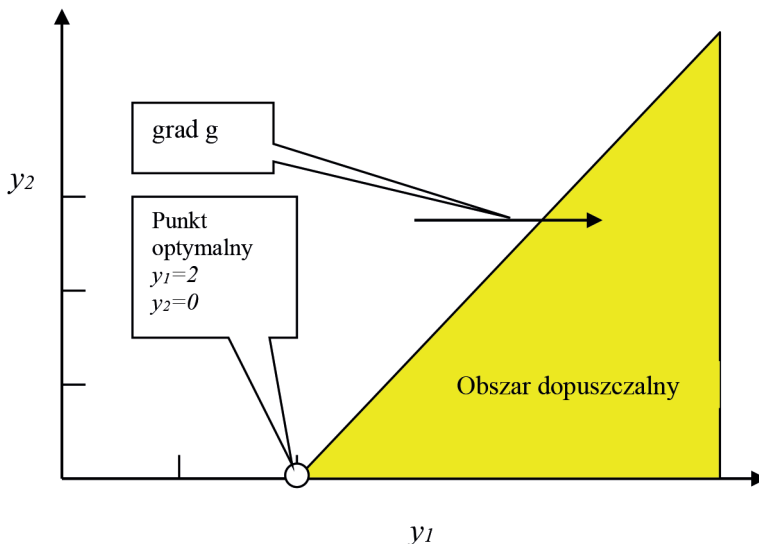
Zadanie dualne:

$$g(y_1, y_2) = 3y_1 \rightarrow \min$$

przy warunkach: $y_1 - y_2 \geq 2$.

W zadaniu dualnym y_1 i y_2 są tzw. zmiennymi dualnymi (jest ich tyle ile jest warunków ograniczających w zadaniu pierwotnym), g jest dualną funkcją celu (jeśli f dążyła do maksimum to g zdąży do minimum i odwrotnie, zaś współczynniki przy zmiennych od których zależy funkcja g , są równe prawym stronom nierówności w zadaniu pierwotnym – w tym przypadku 3 i 0). W zadaniu dualnym ograniczeń jest tyle ile jest zmiennych w zadaniu pierwotnym (w naszym przypadku jedna), a współczynniki przy zmiennych dualnych są

w kolejnych ograniczeniach równe współczynnikom w ograniczeniach zadania pierwotnego, czyli 1 i -1 . Nierówności ograniczające w zadaniu dualnym mają przeciwny kierunek.



Rys. 6. Obszar dopuszczalny i rozwiązanie optymalne dla zadania dualnego

Rysunek 6 pokazuje graficzne rozwiązanie zadania dualnego, które zostało opisane dokładniej w rozdziale 5.4. Widać, że rozwiązaniem optymalnym jest w przestrzeni zmiennych dualnych y_1, y_2 punkt $(2, 0)$, gdyż leży najbliżej początku układu współrzędnych (minimalizacja funkcji celu). Oznacza to, że $y_1=2$ i $y_2=0$. Wartość funkcji $g(2, 0)=6$. Ponieważ z teorii dualności wynika, że $f_{\max} = g_{\min}$, więc $f_{\max}=6$, czyli $x_0=3$, co pokrywa się z wcześniejszym rozwiązaniem.

Pytana i ćwiczenia

1. Rozwiązać zadania optymalizacji:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq \min$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x \rightarrow \max$

przy warunkach: $x \leq 1, x \geq 0$.

c) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \rightarrow \min$

przy warunkach: $x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$.

d) Ile cm^2 blachy należy zużyć, aby wyciąć prostokąt o obwodzie 100 cm i największej powierzchni?

- e) $f(x) = 2x + |x^2 - 1| \rightarrow \max$
przy warunkach: $x \leq 4, x \geq -1$.

Odpowiedzi:

- a) $(0,0), f(0,0) = 0$
b) $x_{\max} = 1, f(1) = \frac{1}{2}$
c) $(0,2), (2,0), f(0,2) = f(2,0) = e^{(-4)}$
d) $625 \text{ cm}^2, (x = 25 \text{ cm}, y = 25 \text{ cm})$
e) $x_{\max} = 4, f(4) = 24$.

2. PROGRAMOWANIE LINIOWE – FORMUŁOWANIE MODELU I METODA GEOMETRYCZNA

W rozdziale tym zostanie zaprezentowany przykład zagadnienia optymalizacji z kategorii zadań programowania liniowego. Zostanie on sformułowany w postaci werbalnej oraz przetłumaczony na postać sformalizowaną. Następnie pokazane będzie jego rozwiązanie metodą graficzną. Metoda ta pozwala na wyrobienie sobie intuicji i ułatwia zrozumienie sensu samego problemu minimalizacji z ograniczeniami, jak też pozwala zrozumieć technikę znajdowania rozwiązania.

Z wymienionych względów przykład poniższy stanowi kluczowy punkt w lekturze całego podręcznika, dlatego zaleca się prześledzenie treści i opisu tego przykładu.

Przykład

Badanym systemem jest mały zakład produkcyjny. Na podstawie obserwacji ustalono, że zakład produkuje dwa rodzaje wyrobów A i B. Za jedną sztukę wyrobu A zakład otrzymuje 11 000 zł, za jedną sztukę wyrobu B – 8 000 zł.

Do wyprodukowania jednej sztuki wyrobu A zużywa się:

- 30 kg blachy stalowej za 100 zł za kg,*
- 2 kg blachy miedzianej za 300 zł za kg,*
- 1 kg pleksiglasu za 500 zł za kg,*
- detale dodatkowe o wartości 1800 zł,*
- 12 roboczogodzin.*

Do wyprodukowania jednej sztuki wyrobu B zużywa się:

- 10 kg blachy stalowej,*
- 0,5 kg blachy miedzianej,*
- 2 kg pleksiglasu,*
- detale dodatkowe o wartości 400 zł,*
- 16 roboczogodzin.*

Czas pracy wynosi 8 godzin dziennie. Jedna roboczogodzina kosztuje zakład 100 zł, zaś zatrudnienie wynosi 5 osób pracujących w produkcji.

Budżet zakładu nie może przekroczyć 500 000 zł miesięcznie zaś na miesięczną produkcję przeznaczono:

- 1000 kg blachy miedzianej,*
- 200 kg pleksiglasu.*

Ile sztuk wyrobu x_1 i x_2 należy wyprodukować w ciągu miesiąca, by zysk był największy?

Formułowanie modelu

Na początek zapisano ograniczenia i cel optymalizacji, wynikające z treści zadania w postaci zwykłych zdań orzekających. Za okres obliczeniowy przyjęty został miesiąc.

1. Koszt produkcji nie może przekroczyć 500 000 zł.
2. Liczba roboczogodzin nie może przekroczyć $5 * 8 * 26 = 1\ 040$.
3. Zużycie blachy miedzianej nie może przekroczyć 1 000 kg.
4. Zużycie pleksiglasu nie może przekroczyć 200 kg.
5. Funkcja celu zostaje określona jako miesięczny zysk zakładu.

W kolejnym kroku zdania te zostaną zapisane w postaci relacji matematycznych.

Niech x_1 oznacza liczbę sztuk wyrobu A produkowaną miesięcznie, zaś przez x_2 odpowiednio liczbę sztuk wyrobu B. Zysk netto po odliczeniu kosztów wynosi zatem dla wyrobu A: , natomiast dla wyrobu B: .

Funkcja celu ma wówczas postać:

$$3\ 900 x_1 + 3\ 850 x_2 = f \quad (1)$$

Ograniczenia natomiast można zapisać jako:

$$\text{Ograniczenie 1: } 7\ 100 x_1 + 4\ 150 x_2 \leq 500\ 000. \quad (2a)$$

$$\text{Ograniczenie 2: } 12 x_1 + 16 x_2 \leq 1\ 040. \quad (2b)$$

$$\text{Ograniczenie 3: } 2 x_1 + 0,5 x_2 \leq 1\ 000. \quad (2c)$$

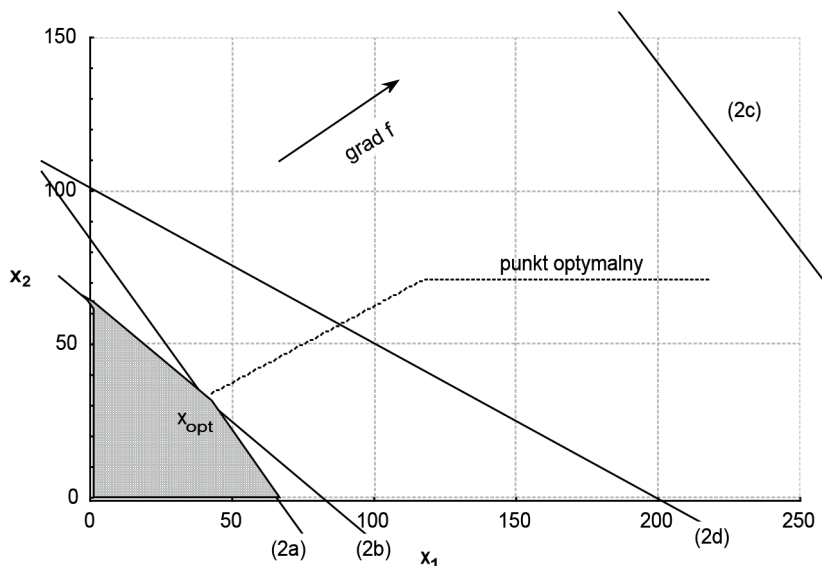
$$\text{Ograniczenie 4: } x_1 + 2 x_2 \leq 200. \quad (2d)$$

$$\text{Oczywistym jest także, iż } x_1 \geq 0 \text{ oraz } x_2 \geq 0. \quad (2e)$$

Znalezienie rozwiązania optymalnego

Zadanie polega na znalezieniu maksimum funkcji f przy warunkach (2a) - (2e). Rozwiązanie go **metodą graficzną** sprowadza się do znalezienia na płaszczyźnie zmiennych x_1 , x_2 obszaru rozwiązań dopuszczalnych (zbioru tych punktów, które spełniają ograniczenia), a następnie wyznaczenie na brzegu tego obszaru punktu optymalnego. Punkt optymalny jest najdalszym punktem brzegu obszaru wskazywanym przez wektor gradientu funkcji celu (jeśli szukane jest maksimum) i najbliższym jeśli szukane jest minimum. Warto w tym miejscu wspomnieć, że wektor gradientu wskazuje kierunek największego wzrostu funkcji w danym punkcie, natomiast długość tego wektora opisuje wielkość tego wzrostu. W sensie matematycznym jest to wektor pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu.

Na rysunku poniżej narysowano na płaszczyźnie x_1, x_2 obszar wyznaczony przez te warunki.



Rys. 7. Ilustracja obszaru wyznaczonego przez warunki (2) oraz położenie rozwiązania optymalnego

Każda z nierówności (2) wyznacza pewną półpłaszczyznę na płaszczyźnie x_1, x_2 , a zbiór dopuszczalnych rozwiązań jest wspólną częścią tych półpłaszczyzn. Na rysunku 7 zaznaczono (poprzez opisanie ich w nawiasie numerem właściwego ograniczenia) proste, wyznaczające odpowiednie półpłaszczyzny. W efekcie zbiór dopuszczalnych par (x_1, x_2) ogranicza się do obszaru zakreślanego. Jeżeli na tej płaszczyźnie zostanie narysowany gradient funkcji celu, który jest wektorem stałym: $\text{grad} f = \vec{c}$, to posuwając się wzdłuż kierunku gradientu najdalej jak tylko można, ale tak, aby nie opuścić granic zbioru dopuszczalnego, można znaleźć rozwiązanie optymalne (x_{opt} na rysunku 7).

Punkt x_{opt} ma tę własność, że:

- 1) spełnia warunki (2),
- 2) wartość funkcji f osiąga w nim maksimum.

Z rysunku widać, że x_{opt} można znaleźć rozwiązując układ równań

$$7100x_1 + 4150x_2 = 500000$$

$$12x_1 + 16x_2 = 1040. \quad (3)$$

Widać także, iż ograniczenia (2c) i (2d) okazały się w tym przypadku nieistotne, co oznacza, że zwiększenie budżetu zakładu i liczby dostępnych roboczogodzin, może zwiększyć produkcję bez naruszania pozostałych ograniczeń (Czytelnik zastanowi się, które z ograniczeń w dalszej kolejności wpływa hamująco na wzrost produkcji, a które jest najbardziej tolerancyjne).

Rozwiązanie równań (3) daje: $x_1 = 57,43$ i $x_2 = 21,7$.

Zagadnienie optymalizacji, w postaci bardziej zwartej, za pomocą wektorów i macierzy można zapisać następująco:

Znaleźć maksimum funkcji

$$f = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \quad (4)$$

przy warunkach $A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$.

Można się przekonać, iż w naszym przykładzie odpowiednie wartości wynoszą

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 500000 \\ 1040 \\ 1000 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 7100 & 4150 \\ 12 & 16 \\ 2 & 0,5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 3900 \\ 3850 \end{bmatrix}$$

Jeżeli chodzi o graficzną technikę rozwiązywania zadań optymalizacji, to sprawdza się tylko dla zadań o małej liczbie wymiarów (praktycznie, tylko do zadań dwuwymiarowych). Dlatego też w następnym rozdziale omawiany przykład zostanie rozwiązany przy pomocy ogólnie dziś dostępnego narzędzia, jakim jest arkusz kalkulacyjny *MS Excel*. Wszystkie przykłady prezentowane w niniejszym opracowaniu można rozwiązywać przy jego pomocy. Należy nadmienić, że istnieje dziś wiele przyjaznych dla użytkownika programów do rozwiązywania zadań optymalizacji. W szczególności każdy pakiet biurowy z arkuszem kalkulacyjnym wyposażony jest w odpowiednie narzędzie. Czytelnik przywykły do używania innych programów powinien wykonać zadanie przy pomocy stosowanego przez siebie programu.

Pytania i ćwiczenia:

1. Sformułować jako zagadnienie programowania liniowego następujące zadanie i rozwiązać je metodą graficzną:

Niewielkie przedsiębiorstwo budowlane postanowiło zawrzeć umowę na wykonanie remontu mieszkania mieszczącego się na poddaszu. W związku z tym musi zatrudnić nowych pracowników. Może zatrudnić kilku doświadczonych techników budowlanych na 6 godzin dziennie lub

kilku praktykantów, którzy mogą pracować 4 godziny dziennie. Średnia stawka płacona technikowi wynosi 10 zł. za godzinę, natomiast odpowiednia płaca dla praktykanta to 4 zł za godzinę. Przedsiębiorstwo może zatrudnić pracowników na łączną sumę godzin nie większą niż 25 dziennie. Na pensję dla nowych pracowników przedsiębiorstwo może przeznaczyć najwyżej 120 zł dziennie. Wydajność pracy wykwalifikowanego technika wynosi 8 jednostek, a praktykanta 3 jednostki. Jak dobrać kadrę pracowniczą do remontu mieszkania, aby jej łączna produktywność była największa?

Czy rozwiązanie optymalne zmieni się, jeżeli:

- a.) przedsiębiorstwo może zatrudnić pracowników na łączną sumę godzin nie większą niż 30 dziennie, przeznaczając na pensję maksymalnie 160 zł dziennie?*
- b.) wydajność pracy wykwalifikowanego technika wynosi 7 jednostek, a praktykanta 4 jednostki?*

2. Sformułować jako zagadnienie programowania liniowego następujące zadanie i rozwiązać je metodą graficzną:

Przedsiębiorstwo „Monter” importuje części elektroniczne do montowania dwóch różnych zestawów komputerowych: I i II. Oszacowano, że jednostkowy zysk ze sprzedaży zestawów wynosi odpowiednio 1000 zł dla zestawu I i 200 zł dla II. Kierownik produkcji określił, że tygodniowo przedsiębiorstwo może poświęcić maksymalnie 480 godzin na montaż zestawów komputerowych. Zestaw I wymaga 12 godzin montażu, a II - 4 godzin montażu. Przedsiębiorstwo może wyprodukować maksymalnie 80 zestawów w ciągu tygodnia. W jakich ilościach przedsiębiorstwo ma produkować zestawy, aby zysk z produkcji był największy? Należy uwzględnić warunek, że zestawów I, ze względu na koszty nie powinno się produkować więcej niż zestawów II.

„Monter” chce udoskonalić zestawy komputerowe i dlatego wprowadza do montażu dodatkową, nowoczesną część elektroniczną. Firma posiada ograniczony zapas tych części wynoszący 350 sztuk. Plan montażowy przewiduje wykorzystanie wszystkich części. Wiadomo, że do zestawu I potrzeba ich 5, natomiast do zestawu II aż 7. Czy zmusi to przedsiębiorstwo do korekty optymalnego planu produkcji i czy wprowadzenie nowej części montażowej jest dla zakładu opłacalne, jeżeli zysk ze sprzedaży zestawów nie zmieni się?

3. Sformułować jako zagadnienie programowania liniowego następujące zadanie i rozwiązać je metodą graficzną:

Mały, prywatny zakład dziewiarski „Rekord” produkuje oryginalne czapki i swetry. Do celów produkcyjnych używa dwóch specjalnych maszyn. W tabelce poniżej podano normy pracy poszczególnych maszyn oraz ich zdolności produkcyjne.

Maszyny	Liczba godzin pracy maszyny na jednostkę produkcyjną		Maksymalna ilość czasu pracy maszyny w ciągu dnia
	czapka	sweter	
M_1	2	1	16
M_2	2	2	24

Wiadomo również, że do produkcji czapki potrzeba 2 osób, natomiast przy produkcji swetra pracują 3 osoby. Zakład zatrudnia 20 osób. Ustalić plan produkcji, tak, aby uzyskać maksymalny zysk zakładając, że cena zbytu czapki wynosi 25 zł, a swetra 75 zł. Poza tym uwarunkowania rynkowe dyktują, aby czapek produkowanych było przynajmniej 2 razy więcej niż swetrów.

- czy rozwiązanie ulegnie zmianie w przypadku objęcia sezonową obniżką cen swetrów i ustalenia tej ceny na poziomie 45 zł?*
- czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli czas pracy maszyny M_1 wzrośnie do 20 i zakład zatrudni dodatkowo 5 osób?*

4. Sformułować jako zagadnienie programowania liniowego następujące zadanie i rozwiązać je metodą graficzną

Ania ma w domu na wsi kilka psów. Chce ustalić wielkości zakupów dwóch rodzajów psiej karmy tak, aby sporządzić odpowiednią mieszankę, która będzie spełniała normy odżywcze przy jak najmniejszym koszcie związanym z zakupem obu rodzajów karm. Psy powinny otrzymywać pewne minima dzienne substancji odżywczych tj. 3 kg węglowodanów i 0,2 kg witamin. Natomiast ilość spożywanego białka nie powinna przekroczyć 4 kg dziennie. Karma pierwsza zawiera (w 1 kg): 0,2 kg węglowodanów, 0,3 kg białka i 0,02 kg witamin, karma druga (w 1 kg): 0,3 kg węglowodanów, 0,2 kg białka, 0,01 kg witamin. Cena 1kg karmy pierwszego rodzaju to 10 zł, natomiast karmy drugiego rodzaju – 6 zł.

Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

karma druga podrożeje i jej cena będzie wynosiła 9 zł za 1 kg?

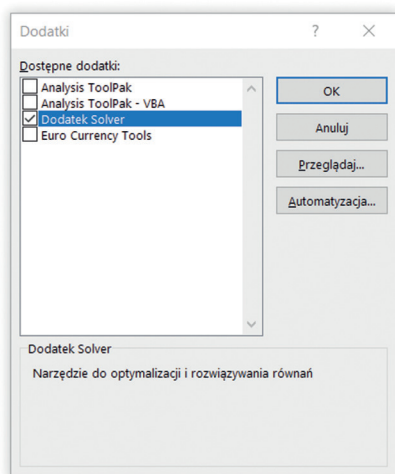
dodane zostanie założenie, że minimum odżywcze dotyczące spożycia węglowodanów przez psy wzrośnie do 4 kg dziennie?

Odpowiedzi:

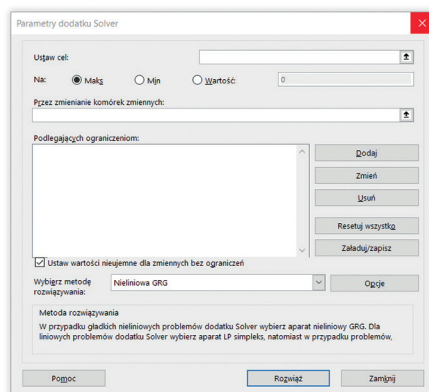
1. $x^* = 4, y^* = 0, F(x^*, y^*) = 32,$
 - a) tak, $x^* = 5, y^* = 0, F(x^*, y^*) = 40$
 - b) tak, $x^* = 5, y^* = 0, F(x^*, y^*) = 35.$
2. $x^* = 30, y^* = 30, F(x^*, y^*) = 36\,000$
 - a) Wprowadzenie nowej części dla zakładu nie jest opłacalne, bo nowe rozwiązanie to: $x^* = 29, y^* = 29, F(x^*, y^*) = 34\,800$ zł.
3. $x^* = 7, y^* = 2, F(x^*, y^*) = 325$ zł
 - a) nie, zmieni się tylko wartość funkcji celu $F(x^*, y^*) = 265$ zł i produkcja stanie się mniej opłacalna
 - b) tak, $x^* = 8, y^* = 3, F(x^*, y^*) = 335$ zł.
4. $x^* = 0, y^* = 20, F(x^*, y^*) = 120$ zł
 - a) tak, $x^* = 12, y^* = 2, F(x^*, y^*) = 138$
 - b) nie.

3. PROGRAMOWANIE LINIOWE Z WYKORZYSTANIEM NARZĘDZIA SOLVER

Arkusz kalkulacyjny *Excel* wyposażony jest w narzędzie zwane *Solverem*. Solver wbudowany jest jako opcja w menu *Dane*. W zależności od wersji pakietu i sposobu instalacji, Solver albo pojawia się standardowo w tym menu, albo trzeba go każdorazowo załadować przy pomocy opcji *Dodatki*. Rysunek 8 pokazuje okno dodatki. Uruchamiając Solver przywołane zostaje okno dialogowe pokazane na rysunku 9. Działanie narzędzia Solver zostanie pokazane na przykładzie zadania zamieszczonego w poprzednim rozdziale. Istnieje niezliczona ilość sposobów przygotowania danych do rozwiązania problemu minimalizacji warunkowej.

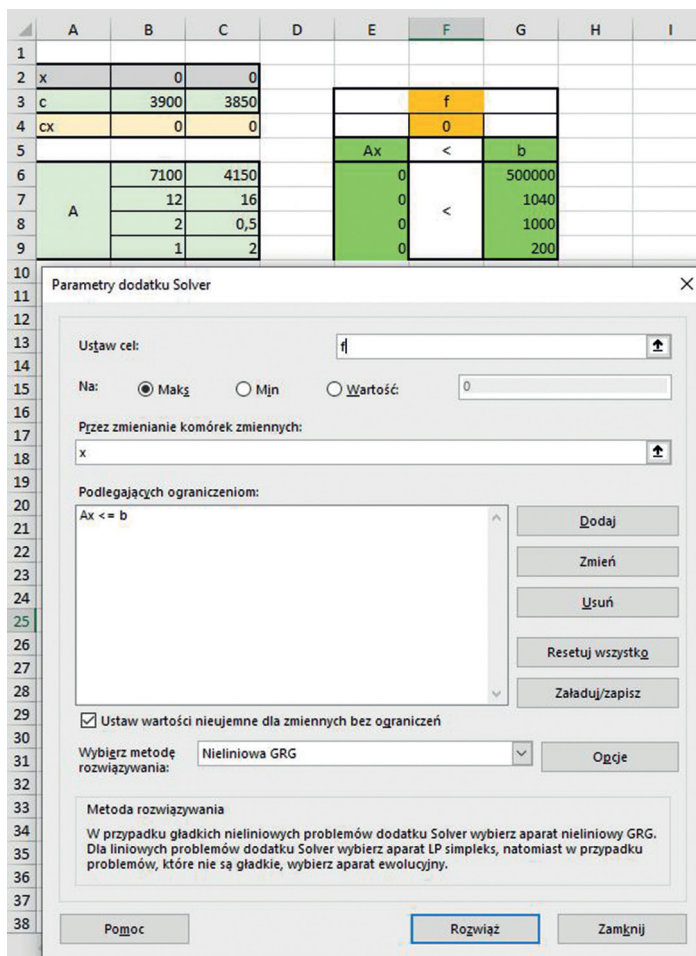


Rys. 8. Okno dodatki



Rys. 9. Okno dialogowe

Każdy użytkownik Solvera powinien sobie wypracować jakiś własny styl lub schemat zapisu danych. Prezentowany poniżej schemat, wykorzystuje warunki zadania, tj., że zadanie (z dokładnością do znaków współczynników funkcji celu) jest zapisane w postaci standardowej (zobacz podrozdział *Definicje i oznaczenia*). Wygodnie jest wtedy posłużyć się nazwami pewnych obszarów arkusza kalkulacyjnego zgodnymi na przykład z oznaczeniami we wzorach (4).



Rys. 10. Fragment arkusza wraz z wypełnionym oknem dialogowym definicji obliczeń

Rysunek 10 przedstawia zaproponowany przez autorów sposób zorganizowania danych. Poszczególne fragmenty arkusza zaznaczone różnymi kolorami zostały nazwane zgodnie z terminologią wzorów (4).

I tak:

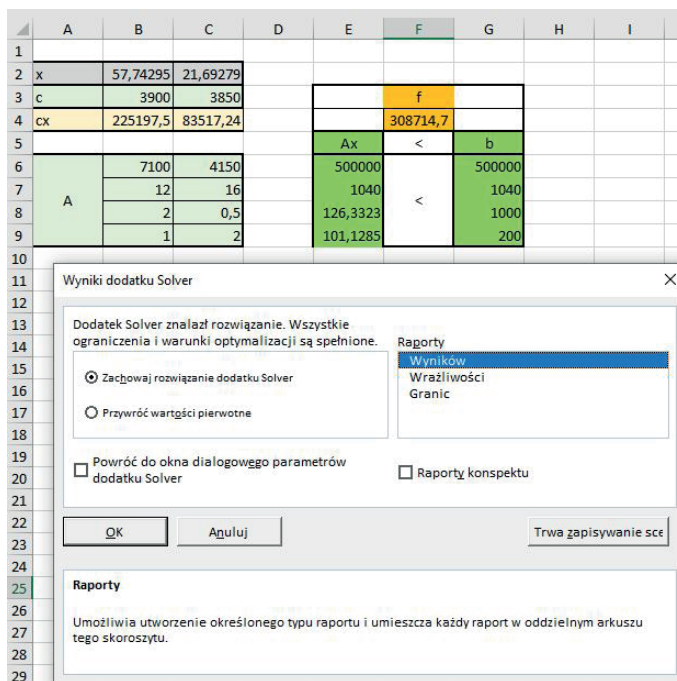
- komórki B2:C2 nazwano x ,
- komórki B3:C3 nazwano c ,
- komórki B4:C4 (zawierające iloczyny cx) nazwano Cx ,
- komórkę F4 (zawierającą $\sum c_i x_i$ – czyli funkcję celu) nazwano f ,
- komórki B6:C9 (zawierające macierz A) nazwano A ,
- komórki E6:E9 (zawierające) nazwano Ax ,

- komórki G6:G9 nazwano b .

W odpowiednie komórki wpisano właściwe wartości, przy czym jako wartości początkowe zmiennych decyzyjnych przyjęto zera. Jest to bezpieczny sposób, zakładając, że zera należą do zbioru dopuszczalnego. Przy takim zorganizowaniu arkusza łatwo jest wypełnić wartości pól dialogowych w oknie Solvera wpisując:

- w komórkę celu f ,
- w komórki zmieniane x ,
- w warunki ograniczające $Ax \leq b$.

Następnie należy właściwie zaznaczyć ustawienia przełączników (np. przełącznik **Równa**: na max) i po naciśnięciu przycisku **Rozwiąż** otrzymany zostanie efekt jak na rysunku 11. Widać, że zmienne decyzyjne przybrały wartości 57,742947 i 21,69279 w zgodzie z poprzednio uzyskanym wynikiem. Zmieniły się też, zgodnie z oczekiwaniem, wartości w innych komórkach oraz pojawił się dialog Solvera dotyczący postępowania z wynikami. W arkuszu można zachować wartości optymalne, albo przywrócić początkowe, oraz sporządzić trzy rodzaje raportów. Po naciśnięciu OK żądany raport ukazuje się w oddzielnym arkuszu. Jego postać przedstawia rysunek 12.



Rys. 11. Ten sam fragment po naciśnięciu przycisku Rozwiąż

Wartość maksymalna funkcji celu w obszarze dopuszczalnym prezentuje komórka F4 na powyższym rysunku 11 i wynosi ona 308 714,7.

A	B	C	D	E	F	G	H															
Microsoft Excel 16.0 Raport wyników																						
Arkusz: [solver1.ods]Arkusz2																						
Raport utworzony: 03.05.2021 10:12:35																						
Wynik: Dodatek Solver znalazł rozwiązanie. Wszystkie ograniczenia i warunki optymalizacji są sp																						
Aparat dodatku Solver																						
Aparat: Nieliniowa GRG																						
Czas rozwiązania: 0,032 sek.																						
Liczba iteracji: 3 Podproblemy: 0																						
Opcje dodatku Solver																						
Maksymalny czas Nieograniczone, Iteracje Nieograniczone, Precision 0,000001																						
Zbieżność 0,0001, Rozmiar populacji 100, Inicjator losowy 0, Pochodne centralne																						
Maksymalna liczba podproblemów Nieograniczone, Maksymalna liczba rozwiązań																						
całkowitoliczbowych Nieograniczone, Tolerancja całkowitoliczbowa 1%, Przyjmij nieujemne																						
Komórka celu (Maks)																						
<table><tr><th>Komórka</th><th>Nazwa</th><th>Wartość początkowa</th><th>Wartość końcowa</th></tr><tr><td>\$F\$4</td><td>cx f</td><td>0</td><td>308714,7335</td></tr></table>								Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa	\$F\$4	cx f	0	308714,7335							
Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa																			
\$F\$4	cx f	0	308714,7335																			
Komórki zmiennych																						
<table><tr><th>Komórka</th><th>Nazwa</th><th>Wartość początkowa</th><th>Wartość końcowa</th><th>Całkowite</th></tr><tr><td>\$B\$2</td><td>x</td><td>0</td><td>57,74294671</td><td>Ciągłe</td></tr><tr><td>\$C\$2</td><td>x</td><td>0</td><td>21,69278997</td><td>Ciągłe</td></tr></table>								Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa	Całkowite	\$B\$2	x	0	57,74294671	Ciągłe	\$C\$2	x	0	21,69278997	Ciągłe
Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa	Całkowite																		
\$B\$2	x	0	57,74294671	Ciągłe																		
\$C\$2	x	0	21,69278997	Ciągłe																		
Ograniczenia																						
<table><tr><th>Komórka</th><th>Nazwa</th><th>Wartość komórki</th><th>Formuła</th><th>Stan</th><th>Zapas czasu</th></tr><tr><td>\$E\$6</td><td>A Ax</td><td>500000</td><td>\$E\$6<=\$G\$6</td><td>Wiążące</td><td>0</td></tr></table>								Komórka	Nazwa	Wartość komórki	Formuła	Stan	Zapas czasu	\$E\$6	A Ax	500000	\$E\$6<=\$G\$6	Wiążące	0			
Komórka	Nazwa	Wartość komórki	Formuła	Stan	Zapas czasu																	
\$E\$6	A Ax	500000	\$E\$6<=\$G\$6	Wiążące	0																	

Rys. 12. Raport wyników solwera

Pytania i ćwiczenia

1. Sformułować jako zagadnienia programowania liniowego następujące zadanie, a następnie rozwiązać je metodą graficzną oraz za pomocą Solwera: Firma „Kwiatek” produkuje dwa typy nawozów do użyźniania gleby. Koszt wyprodukowania obydwu rodzajów nawozów wynosi 1 zł za litr. Opierając się na analizie obecnego stanu zapasów oraz na planie produkcji na następny miesiąc postanowiono, że w najbliższym tygodniu firma musi wyprodukować, co najmniej 30 litrów nawozu typu pierwszego i co najmniej 20 litrów nawozu typu drugiego. Ustalono również, że w najbliższym tygodniu musi być całkowicie zużyty posiadany zapas podstawowego surowca wykorzystywanego do produkcji nawozów, gdyż surowiec ten jest wyjątkowo szybko rozkładającym się materiałem. Bieżący stan zapasów tego surow-

ca wynosi 80 kg. Ponadto wiadomo, że aby wyprodukować 1 litr nawozu typu pierwszego należy zużyć 1 kg surowca, i że do wyprodukowania 1 litra nawozu drugiego typu potrzeba 2 kg surowca. Wąskim gardłem procesu produkcji jest nowoczesna maszyna, której czas produkcji w ciągu tygodnia jest ograniczony i wynosi maksymalnie 60 godzin. Wiadomo, że produkcja 1 litra nawozu typu pierwszego wymaga użycia maszyny przez pół godziny, natomiast typu drugiego przez 1,5 godziny. Jaki jest optymalny plan produkcji i jak wysoki jest koszt jego realizacji?

Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

- a) koszt produkcji nawozu typu drugiego wzrośnie trzykrotnie?
- b) okaże się, że zapasy surowca, który szybko ulega rozkładowi wynoszą 100 kg?

2. Sformułować jako zagadnienia programowania liniowego następujące zadanie, a następnie rozwiązać je metodą graficzną oraz za pomocą Solvera: Twój przyjaciel odziedziczył 9000 zł i chce je zainwestować. Ma możliwość wzięcia udziału w dwóch różnych przedsięwzięciach. W obydwu przypadkach wymaga to poświęcenia czasu i zainwestowania pieniędzy. Pierwsze przedsięwzięcie wymaga zainwestowania 7000 zł oraz 800 godzin pracy, natomiast oszacowany zysk (pomijając wartość poświęconego czasu) będzie wynosił 6000 zł. Drugie przedsięwzięcie wymaga 8000 zł oraz 700 godzin, a zysk wyniesie również 6000 zł. Przyjaciel prosi Cię, abyś mu doradził jak wybrać taką kombinację udziałów w obu przedsięwzięciach, aby zysk przyniesiony z zainwestowanych pieniędzy był jak największy zakładając, że może on poświęcić maksymalnie 900 godzin swojego czasu w wakacje na pracę.

Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

- a) zwiększony zostanie limit godzin poświęconych pracy do 1000?
 - b) zysk z pierwszego przedsięwzięcia będzie wynosił 4000 zł, a z drugiego przedsięwzięcia 8000 zł?
3. Sformułować jako zagadnienia programowania liniowego następujące zadanie, a następnie rozwiązać je metodą graficzną oraz za pomocą Solvera: Klasa III „a” w ramach szkolnych obowiązków otrzymała pod opiekę 10 chomików. Uczniowie zastanawiają się ile mają kupować 100 gramowych opakowań pszenicy a ile opakowań specjalnej karmy dla chomików, tak, aby dostarczyć im potrzebne składniki odżywcze przy możliwie najniższych kosztach. Wiadomo, że każdy chomik powinien otrzymywać miesięcznie, co najwyżej 4 jednostki witamin i soli mineralnych oraz minimum 6 jednostek węglowodanów, a spożycie białka nie powinno przekroczyć 4 jednostek. Wiadomo również, że pszenicy w mieszance żywieniowej sporządzanej dla

chomika powinno być mniej niż karmy. W tablicy podano zawartość każdego ze składników w 100 g oraz ich ceny.

	Zawartość w 100 g wartości odżywczych			Cena 100g tj. 1 opakowania (w zł)
	Witaminy i sole mineralne	Węglowodany	Białko	
<i>Pszenica</i>	0,5	3	1	2
<i>Karma dla chomików</i>	1	2	2	3

Ponieważ pszenica zawiera pewne naturalne substancje tłuszczowe, to aby chomik nie uległ „przerostowi” należy ograniczyć jej spożycie do maksymalnie 2 opakowań miesięcznie.

- a) ile wynosi minimalny koszt wyżywienia i który składnik dostarczany będzie w minimalnej ilości?*
 - b) czy rozwiązanie optymalne zmieni się, jeżeli cena suchej karmy wzrośnie do 5 zł?*
4. Sformułować jako zagadnienia programowania liniowego następujące zadanie, a następnie rozwiązać je metodą graficzną oraz za pomocą Solvera:
Browar ma w planach poszerzenie oferty swoich produktów o dwa nowe gatunki piwa: jasne i ciemne. W procesie produkcyjnym obu gatunków piwa używany jest chmiel, którego zasoby są ograniczone i wynoszą maksymalnie 8 jednostek. Kierując się względami „zdrowotnymi”, ustalono, że nowe piwa powinny zawierać minimum 1 jednostkę witaminy B. Po przeprowadzeniu wstępnych badań rynku, okazało się, że należy produkować 2 razy więcej piwa jasnego niż ciemnego. Normy zużycia chmielu i witamin w procesie produkcji zawiera tabela:

Gatunek piwa	Normy zużycia (1l piwa)	
	chmiel	witaminy
<i>Jasne</i>	1	0,2
<i>Ciemne</i>	1	0,1

Wiadomo również, że browar ma ograniczone zdolności produkcyjne związane ze zużyciem maszyn wykorzystywanych do produkcji obu gatunków piwa. Dlatego może on wyprodukować w ciągu dnia maksymalnie 5 litrów

piwa jasnego i 4 litry piwa ciemnego. Ile litrów piwa dziennie powinien produkować browar, jeżeli zysk ze sprzedaży jednej półlitrowej butelki piwa jasnego to 0,5 gr., a piwa ciemnego to 1 zł.

Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

- a) zasoby chmielu wzrosną do 10 jednostek i nie będzie narzuconych żadnych proporcji, co do wielkości produkcji obu gatunków piwa?*
- b) zysk z produkcji piwa ciemnego wzrośnie do 2 zł?*

Odpowiedzi:

1. $x^* = 30, y^* = 25, F(x^*, y^*) = 55$ zł
 - a) tak, $x^* = 40, y^* = 20, F(x^*, y^*) = 100$ zł
 - b) tak, $x^* = 60, y^* = 20, F(x^*, y^*) = 80$ zł.
2. $x^* = 0,6, y^* = 0,6, F(x^*, y^*) = 7\,200$ zł
 - a) $x^* = 1,13, y^* = 0,13, F(x^*, y^*) = 7\,600$ zł
 - b) $x^* = 0, y^* = 1,125, F(x^*, y^*) = 9\,000$ zł
3. Dla jednego chomika: $x^* = 1,2, y^* = 1,2, F(x^*, y^*) = 6$ zł, dla 10 chomików:
 $x^* = 12, y^* = 12, F(x^*, y^*) = 60$ zł
 - a) 60 zł, węglowodany
 - b) nie, tylko wartość funkcji celu wzrośnie do 84 zł.
4.
 - a) tak, $x^* = 0, y^* = 10, F(x^*, y^*) = 20$ zł
 - b) nie, tylko wartość funkcji celu wzrośnie do 16 zł.

4. PROGRAMOWANIE DYSKRETNE, CAŁKOWITOLICZBOWE I STOCHASTYCZNE – PODSTAWY TEORETYCZNE

Zagadnienie postaci (4) tzn. takie, w którym funkcja celu jest liniowa i ograniczenia mają postać równań bądź nierówności liniowych nazywa się zadaniem **programowania liniowego**. Poniżej przedstawione zostało nazewnictwo wielkości używanych w (4):

$\vec{c}$ – wektor kolumnowy współczynników funkcji celu,

$\vec{b}$ – wektor wyrazów wolnych,

A – macierz ograniczeń,

$\vec{x}$ – wektor decyzyjny (wektor zmiennych decyzyjnych).

Szczegółowa analiza zadania (4) prowadzi do następujących komplikacji: pierwsza komplikacja, która już implicite tkwi w rozwiązaniem zadaniu polega na tym, iż zmienne x_1 i x_2 mogą przybierać tylko wartości całkowite, ponieważ oznaczają one niepodzielne liczby sztuk odpowiednich wyrobów. W tym konkretnym przypadku łatwo tę trudność pokonać dokonując zaokrąglenia wyników. Błąd spowodowany tym będzie niewielki, ponieważ względny błąd zaokrąglenia jest mały, a ponadto można zawsze sprawdzić, czy przez zaokrąglenie nie przekroczono obszaru rozwiązań dopuszczalnych zakreskowanego na rysunku 7. W przypadku, braku tak prostej reprezentacji poglądowej, jaką stanowi rysunek 7, tego typu metoda zaokrąglania może prowadzić do dużych błędów, do naruszania ograniczeń i na ogół przestrzega się przed jej stosowaniem. Zagadnienie optymalizacji, w którym zmienne decyzyjne przybierać mogą tylko wartości całkowite nazywa się **programowaniem dyskretnym** lub **całkowitoliczbowym** [6], [17].

W zadaniu przyjęto założenie, że wszystkie parametry strukturalne wchodzące w skład modelu, a więc elementy wektorów $\vec{c}$, $\vec{b}$ i macierzy A są wielkościami ustalonymi. Nie zawsze tak jest. Bardzo często parametry strukturalne są zmiennymi losowymi. Na przykład podany na podstawie obserwacji koszt jednej roboczogodziny mógł być wartością średnią. Gdyby obserwator uwzględnił dodatkowe koszty, pracę w godzinach nadliczbowych oraz w niedzielę, i tym podobne czynniki losowe, to okazałoby się, że 100 zł jest tylko wartością średnią ceny jednej roboczogodziny, zaś sama cena jest zmienną losową. Analogicznie, przy dokładniejszej analizie okazać by się mogło, że większość danych o badanym zakładzie stanowią zmienne losowe, zaś war-

tości, jakie dla nich przyjęto w modelu, są jedynie pewnymi charakterystykami tych zmiennych losowych, na przykład ich wartościami przeciętnymi. W takim przypadku, tzn. gdy elementy macierzy ograniczeń, bądź wektora wyrazów wolnych, bądź współczynniki funkcji celu są zmiennymi losowymi, zadanie (4) nazywa się zadaniem **programowania stochastycznego** [20]. W dalszym ciągu opisany zostanie szczegółowo model liniowy oraz niektóre przypadki modelu dyskretnego, natomiast zagadnienie modeli stochastycznych nie będzie omawiane w tym podręczniku.

Pytania i ćwiczenia

1. Co to są badania operacyjne?
2. Na czym polega optymalizacja układu?
3. Na jakie etapy można podzielić proces optymalizacji rozwiązywania zadania?
4. Co to jest model matematyczny?
5. Co to są parametry strukturalne?
6. Co to jest wskaźnik jakości?
7. Kiedy model nazywany jest liniowym, dyskretnym, stochastycznym?
8. Co to jest macierz ograniczeń?
9. Co to jest zmienna decyzyjna?

5. PROGRAMOWANIE LINIOWE

5.1. DEFINICJE I OZNACZENIA

Przed przystąpieniem do czytania tego rozdziału zaleca się przypomnienie sobie wiadomości z algebry i geometrii w przestrzeni n -wymiarowej. Niech $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}$ będą wektorami n -wymiarowymi, kolumnowymi, A macierzą o m -wierszach i n kolumnach, a A^T oznacza transponowaną macierz A . Zapis jest następujący: Wektor przestrzeni n - wymiarowej

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Macierz A o m wierszach i n kolumnach (macierze oznaczono dużymi literami)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Transpozycję macierzy A oznaczono jako A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wektor można interpretować jako macierz o n wierszach i jednej kolumnie tzn. $\vec{x} = X$ (transpozycja oznaczana będzie przez $\vec{x}^T$, lub równoważnie jako X^T). Iloczyn skalarny wektorów zapisywać można w tej konwencji na różne sposoby:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum x_i y_i = X^T Y = \vec{x}^T Y = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} y^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y^n \end{bmatrix}$$

Wielkości skalarne oznaczone będą z reguły literami alfabetu greckiego, z wyjątkiem przypadków, gdy istnieją inne, powszechnie używane oznaczenia.

Kombinacją wypukłą dwóch punktów x_1, x_2 o współczynniku θ nazywany jest punkt x :

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2, \text{ gdzie } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Kombinacją wypukłą n punktów $x_1, \dots, x_n$ o współczynnikach α_i nazywany jest punkt x :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \text{ gdzie } \alpha_i \geq 0: \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Zbiór w przestrzeni R_n nazywany jest wypukłym, jeżeli zawiera wszystkie kombinacje wypukłe dowolnych dwóch punktów należących do tego zbioru. Inaczej można sformułować to w ten sposób, iż w zbiorze wypukłym każdy odcinek łączący dwa punkty zbioru zawiera się w tym zbiorze.

Sympleksem^{*} w przestrzeni n -wymiarowej nazywany jest zbiór kombinacji wypukłych $n+1$ punktów tej przestrzeni, takich, że zbiór wektorów łączących jeden z tych $n+1$ punktów z pozostałymi n punktami jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych. Sympleksem w przestrzeni jednowymiarowej jest odcinek (wypukła kombinacja dwóch punktów), dwuwymiarowej – trójkąt, trójwymiarowej – czworościan, itd.

Różne postacie sformułowania zagadnienia programowania liniowego

Postać ogólna

Zagadnienie programowania liniowego, opisane po części w poprzednim rozdziale, w najogólniejszej swej postaci może być zapisane następująco:
Znaleźć minimum funkcji liniowej

^{*} Pojęcie to definiowane jest ze względu na skojarzenia z metodą obliczeniową o podobnej nazwie.

$$f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (5)$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n &\leq b_k \\ a_{(k+1)1} x_1 + a_{(k+1)2} x_2 + \dots + a_{(k+1)n} x_n &= b_{k+1} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Taka postać zadania nazywa się **postacią ogólną**.

Postać standardowa

Jeżeli wszystkie ograniczenia (6) mają formę nierówności, to znaczy jeżeli (6) można zapisać jako

$$A\vec{x} \leq \vec{b}, \quad (7)$$

to zadanie

$$f = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \Rightarrow \min,$$

$$\text{przy warunkach } A\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0. \quad (8)$$

nazywa się **postacią standardową** zagadnienia programowania liniowego.

Postać kanoniczna

W wypadku, gdy wszystkie ograniczenia (7) są równościami, postać zadania nazywa się postacią kanoniczną zagadnienia programowania liniowego. Jej zapis jest następujący:

$$f = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \Rightarrow \min$$

$$\text{przy warunkach } A\vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0. \quad (9)$$

Kilka słów komentarza na temat trzech przedstawionych postaci zadania i stosowanej terminologii. Po pierwsze, optymalizacja polegać będzie na minimalizacji funkcji celu. Nie jest to istotnym ograniczeniem, bo przez zmianę znaku wektora $\vec{c}$, minimalizacją $f = \vec{c}^T \cdot \vec{x}$ odpowiadać będzie maksymalizacji. Po drugie, w literaturze spotkać można bardzo różne sposoby stosowania terminologii dotyczącej postaci zadań programowania liniowego. W szczególności np. tę postać, którą jedni nazywają standardową, inni nazywają kanoniczną

i na odwrót. W dalszym ciągu, przy omawianiu problemów teoretycznych wykorzystano przeważnie postać kanoniczną zadań programowania liniowego, w związku z czym zadanie dowolnej postaci należy najpierw sprowadzić do postaci kanonicznej.

Czytelnik łatwo zauważy, iż można to zrobić, wprowadzając pewną liczbę dodatkowych zmiennych dodatnich (w przypadku zadania ogólnego k , w przypadku zadania standardowego m zmiennych), które dodane do lewych stron nierówności zmieniają je w równania. Rozszerzone zostały w ten sposób wektory $\vec{x}$ i $\vec{c}$ do wymiarów odpowiednio $n + k$ lub $n + m$. Współczynniki funkcji celu odpowiadające nowym zmiennym przyjęto jako równe zero. Postępując w ten sposób zmieniono jedynie postać zadania, nie zmieniając jego treści. Wprowadzone dodatkowo zmienne nazwane zostały **zmiennymi osłabiającymi** (inne nazwy spotykane w literaturze przedmiotu to **zmienne swobodne** lub **bilansujące**). Tak więc pierwszym etapem rozwiązania zadania programowania liniowego będzie sprowadzenie go do postaci kanonicznej.

Z pewnych powodów należy przyjąć dodatkowo, aby wektor wyrazów wolnych $\vec{b}$ był wektorem o dodatnich składowych. Można to osiągnąć przez pomnożenie odpowiednich równań (9) przez -1 . Po powyższych wyjaśnieniach i zastrzeżeniach zadanie programowania w postaci kanonicznej w kilku równoważnych formach kształtuje się następująco:

1.

$$f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \Rightarrow \min,$$

przy warunkach

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_n \geq 0.$$

2.

$$f = \sum_{i=1}^n c_i x_i \Rightarrow \min,$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + b_j \quad j = 1, \dots, m,$$

$$x_i \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

$$3. \quad f = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \Rightarrow \min$$

przy warunkach $A\vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{x} \geq 0.$

$$f = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \Rightarrow \min$$

przy warunkach

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq 0$$

gdzie $\vec{a}_i$ – wektor utworzony z i -tej kolumny macierzy A . Ten ostatni zapis będzie szczególnie użyteczny przy wyjaśnianiu etapów znajdowania rozwiązania optymalnego.

Poniżej przytoczone zostaną definicje i twierdzenia przydatne przy konstrukcji rozwiązania optymalnego.

Def. 1.: Rozwiązaniem dopuszczalnym zadania programowania liniowego jest wektor $\vec{x}$ spełniający warunki (9). Zbiór wszystkich rozwiązań dopuszczalnych oznaczony zostanie symbolem D . Takie rozwiązanie dopuszczalne $\vec{x}_0$, które spełnia warunek $f(\vec{x}_0) = \min f(\vec{x})$ jest szukany rozwiązaniem optymalnym.

Def. 2.: Rozwiązaniem bazowym układu równań (9) nazywane jest takie rozwiązanie, w którym $n-m$ zmiennych jest równych zero. Pozostałe m zmiennych, które są dodatnie nazywa się **zmiennymi bazowymi**.

Def. 3.: Zdegenerowanym rozwiązaniem bazowym nazywane jest rozwiązanie układu równań (9), w którym mniej niż m zmiennych jest dodatnich, a pozostałe równe są zero.

Def. 4.: Bazą nazywany jest zbiór wektorów $\vec{a}_j$ (utworzonych z kolumn macierzy A) odpowiadających zmiennym bazowym. Wektory z tego zbioru nazywane są **wektorami bazowymi**. Jeżeli bazę stanowi m pierwszych kolumn macierzy A to: $\sum_{i=1}^n \vec{a}_i x_i = \vec{b}$.

Widać, iż wektory bazowe mają tę własność, że ich kombinacja liniowa ze współczynnikami równymi zmiennym bazowym daje wektor wyrazów wolnych.

Tw. 1.: Zbiór D jest zbiorem wypukłym.

Zbiór D jest częścią wspólną m półprzestrzeni n wymiarowych, z których każda jest wyznaczona przez jedną z nierówności (8). Jako część wspólna zbiorów wypukłych jest zatem D zbiorem wypukłym – dokładnie wielościannem wypukłym. Udowodnienie tego twierdzenia można przeprowadzić przez wykazanie, iż dowolna wypukła kombinacja rozwiązań jest też rozwiązaniem nierówności (8) bądź (9).

Tw. 2.: *Rozwiązanie optymalne zadania programowania liniowego jest rozwiązaniem wierzchołkowym, tzn. punkt $\vec{x}_{opt}$ jest wierzchołkiem wielościanu D .*

Tw. 3.: *Jeżeli rozwiązanie optymalne wyznaczone jest przez więcej niż jeden wierzchołek D , to istnieje nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych będących kombinacjami wypukłymi tych wierzchołków (krawędzie lub ściany wielościanu D wyznaczone przez wierzchołki optymalne).*

Zamiast dowodzić twierdzeń 2 i 3 proponuję się Czytelnikowi, aby zinterpretował je geometrycznie przyglądając się rysunkowi 7. Bardzo wygodnie jest w tym celu uzupełnić rysunek wykreślając poziomice funkcji f . Jaką orientację względem boku wielokąta zakreskowanego powinien mieć gradient funkcji celu, aby zachodził przypadek opisany w Twierdzeniu 3?

Tw. 4.: *Dowolne rozwiązanie bazowe (zdegenerowane lub nie) jest rozwiązaniem wierzchołkowym wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające mu wektory bazowe są liniowo niezależne.*

Dowód.

Niech rozwiązanie bazowe zawiera k dodatnich składowych ($k \leq m$).

Ponieważ jest to rozwiązanie dopuszczalne, więc

$$\sum_{i=1}^k \vec{a}_i x_i = \vec{b}.$$

Najpierw zostanie udowodniony warunek konieczny, tzn. implikacja:

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ liniowo niezależne $\Rightarrow \vec{x} = [x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0] =$ wierzchołek D .

Dowód przeprowadzono metodą nie wprost. Jeżeliby nie był wierzchołkiem, to musiałby być kombinacją wypukłą dwóch dowolnych $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$:

$$\vec{x} = \theta \vec{x}_1 + (1 - \theta) \vec{x}_2$$

Aby powyższa równość zachodziła, wektory $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ muszą być postaci:

$$\vec{x}_1 = [x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, 0, \dots, 0],$$

$$\vec{x}_2 = [x_1^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, 0, \dots, 0].$$

Ponieważ $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ są rozwiązaniami dopuszczalnymi, więc zachodzi:

$$\sum_{i=1}^k \vec{a}_i x_i^{(1)} = \vec{b} \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^k \vec{a}_i x_i^{(2)} = \vec{b}$$

a stąd wynika, iż wektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ są liniowo zależne, gdyż tylko w takim wypadku dowolny wektor $\vec{b}$ może być wyrażony w postaci dwóch różnych kombinacji liniowych tych wektorów.

Drugą część twierdzenia, czyli warunek dostateczny, udowodniony zostanie również nie wprost. Sprowadza się to do dowodu implikacji:

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \text{ liniowo zależne} \Rightarrow \vec{x} \text{ nie jest wierzchołkiem } D.$$

Jeżeli $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ są liniowo zależne to znaczy, że

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}.$$

Jednocześnie zaś

$$\sum_{i=1}^k \vec{x}_i \vec{a}_i = \vec{0}.$$

Następnie po dodaniu i odjęciu stronami, powyższe równania otrzymują postać:

$$\sum_{i=1}^k y_i \vec{a}_i = \vec{b} \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^k z_i \vec{a}_i = \vec{b}, \quad \text{gdzie: } y_i = x_i + \alpha_i \quad \text{oraz} \quad z_i = x_i - \alpha_i.$$

Stąd wynika, iż $\vec{x} = \frac{1}{2} \vec{y} + \frac{1}{2} \vec{z}$ jest kombinacją wypukłą dwóch różnych punktów dopuszczalnych, a więc nie jest wierzchołkiem zbioru D . Dowód ten jest ostatnim etapem przytaczania twierdzeń będących podstawą metod obliczeniowych rozwiązywania zadań programowania liniowego. Poniżej opisane zostaną wnioski z twierdzeń 1-4.

Wniosek z twierdzenia 2, w celu znalezienia rozwiązania optymalnego nie trzeba szukać wszystkich rozwiązań dopuszczalnych, wystarczy znaleźć rozwiązania wierzchołkowe. Twierdzenie 4 dostarcza przepisu na szukanie takich rozwiązań. Mówi ono mianowicie, iż rozwiązaniem wierzchołkowym jest rozwiązanie bazowe, ale nie dowolne, lecz takie, by odpowiedni zbiór wektorów bazowych był zbiorem wektorów liniowo niezależnych. Ponieważ

dalej wektory $\vec{a}_i$ mają m składowych, więc maksymalna baza może zawierać m wektorów, co oznacza, że największa liczba zmiennych bazowych może wynosić m (stąd napisano np. $k \leq m$).

Liczba kombinacji liniowo niezależnych wektorów m - wymiarowych ze zbioru n wektorów wynosi C_n^m , gdzie C_n^m oznacza symbol Newtona

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

wobec czego, aby przebadać wszystkie rozwiązania wierzchołkowe wystarczy znaleźć C_n^m rozwiązań zamiast znajdować nieskończenie wiele rozwiązań, gdyby zadanie było rozwiązywane bez znajomości twierdzeń 1–4. W dalszym ciągu zostanie zaprezentowana metoda, która umożliwi badanie nie wszystkich wierzchołków, lecz tylko niektórych i pozwoli ograniczyć liczbę niezbędnych rozwiązań, do co najwyżej m .

5.2. METODA SIMPLEKS

Poniżej opisany zostanie algorytm podany po raz pierwszy przez Dantzig [11] w roku 1947 r., przy założeniu, że rozwiązania bazowe są niezdegenerowane. Algorytm ten nazywany jest również **algorytmem simpleks**. Za jego pomocą, startując od dowolnego rozwiązania wierzchołkowego znajdować można następne rozwiązanie wierzchołkowe takie, dla którego funkcja celu przyjmuje wartość mniejszą od poprzedniej. Wykonując m lub mniej kroków iteracyjnych dochodzi się do wierzchołka optymalnego, znajdując w ten sposób rozwiązanie zadania. Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w m - wymiarowej przestrzeni można rozłożyć na kombinacje liniowe innych wektorów $\vec{a}_i$. Współczynniki tych kombinacji liniowych oznaczane będą x_i^j , gdzie:

j – numer wektora rozkładanego,

i – numer wektora w kombinacji liniowej.

Jeżeli wektorem rozkładanym będzie $\vec{b}$, to dla wyróżnienia będzie zapisane x_i^b . Ponieważ wtedy $\sum_{i=1}^n x_i^b \cdot \vec{a}_i = \vec{b}$, więc w każdej kolejnej iteracji wektor $\vec{x}^T = [x_p^b, x_2^b, \dots, x_m^b, 0, 0, \dots, 0]$ będzie jednocześnie rozwiązaniem zadania w tej iteracji. Niech $\vec{x}^T$ będzie jakimkolwiek znalezionym rozwiązaniem wierzchołkowym

$$\vec{x}^T = [x_p^b, x_2^b, \dots, x_m^b, 0, 0, \dots, 0] \quad (10)$$

któremu odpowiada wartość funkcji celu

$$f_b = \sum_{i=1}^n x_i^b c_i \quad (11)$$

(Metoda znajdowania takiego pierwszego rozwiązania zostanie opisana w dalszej części).

Pytanie: jak znaleźć inne rozwiązanie $\vec{x}$, które:

- będzie znów wierzchołkowe,
- będzie lepsze od poprzedniego ($f_b > f(\vec{x})$).

Ponieważ (10) jest rozwiązaniem wierzchołkowym, więc w równaniu

$$\sum_{i=1}^m x_i^b \cdot \vec{a}_i = \vec{b} \quad (12)$$

wektory $\vec{a}_i$ są liniowo niezależne (Tw. 4). Dowolny wektor niebazowy $\vec{a}_j$ ($j > m$) można zatem wyrazić jako kombinację liniową wektorów bazy $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$

$$\sum_{i=1}^m x_i^j \vec{a}_i = \vec{a}_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

Pomocniczą wartość f_j związaną z wektorem a_j definiuje się jako:

$$f_j = \sum_{i=1}^n x_i^j c_i \quad j = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Mnożenie (13) i (14) przez dowolną liczbę $\theta > 0$ i odejmowanie odpowiednio od (11) i (12) implikuje:

$$\sum_{i=1}^m (x_i^b - \theta x_i^j) \vec{a}_i + \theta \vec{a}_j = \vec{b}, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^m (x_i^b - \theta x_i^j) c_i + \theta c_j = f_b - \theta(f_j - c_j). \quad (16)$$

Na pytanie postawione wcześniej można odpowiedzieć analizując wzory (15) i (16). Aby otrzymać rozwiązanie wierzchołkowe inne niż (10) należy:

1. wyrzucić pewien wektor z bazy $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$,
2. pewien nowy wektor spośród $\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_n$ wprowadzić na jego miejsce.

Odpowiedź na pytanie sprowadza się zatem do wskazania, który wektor należy do bazy wprowadzić, a który z niej wyrzucić. Z (16) widać, że ponieważ $\theta > 0$, wprowadzenie do bazy wektora $\vec{a}_j$ zmniejszy wartość funkcji celu, jeśli tylko $f_j - c_j > 0$. Zatem w kolejnej iteracji należy wprowadzić do bazy wektor $\vec{a}_i$, dla którego:

$$f_j - c_j = \max_j (f_j - c_j), \quad (17)$$

$$f_j - c_j > 0.$$

Zapewnia to maksymalne zmniejszenie funkcji celu. Z (15) widać, że aby któryś z wektorów $\vec{a}_i$ ($i \leq m$) wypadł z bazy, jedno z wyrażeń $x_i^b - \theta x_i^l$ w $\Sigma(x_i^b - \theta x_i^l)$ musi stać się równe zeru.

Jeśli będzie to wyrażenie o numerze k to:

$$\theta = \frac{x_k^b}{x_k^l}.$$

Można zaobserwować, że ponieważ poprzednie rozwiązanie było dopuszczalne, to $x_i^b > 0$ dla $i = 1, \dots, m$.

Aby nowe rozwiązanie było dopuszczalne musi być $x_i^b - \theta x_i^l > 0$, $\theta > 0$.

Wynika stąd, że $x_k^l > 0$ oraz

$$\theta = \min_j \frac{x_i^b}{x_i^l} = \frac{x_k^b}{x_k^l} > 0. \quad (18)$$

Wybierając wektor do wprowadzenia w iteracji według reguły (17), a wektor do eliminacji według (18) uzyskano nowe rozwiązanie, które jest coraz bliższe rozwiązaniu optymalnemu. Jak wynika z (16) jest to zarazem rozwiązanie wierzchołkowe. To nowe rozwiązanie wierzchołkowe $\vec{x}^b$, nowe współczynniki x_j^b , wskaźniki $f_j - c_j$, nowa wartość funkcji celu wyrażone są na mocy (18), (15), (16) wzorami:

$$\begin{aligned} x_i^b &= x_i^b - \frac{x_k^b}{x_k^l} \cdot x_i^l, & i \neq k, \\ x_k^b &= \frac{x_k^b}{x_k^l}, \\ x_i^j &= x_i^j - \frac{x_k^j}{x_k^l} \cdot x_i^l, & i \neq k, \\ x_k^j &= \frac{x_k^j}{x_k^l}, \\ f' &= f - \frac{x_k^b}{x_k^l} (f_1 - c_1), \\ (fj - cj)' &= fj - cj - \frac{x_k^j}{x_k^l} (f_1 - c_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Można zauważyć, że wzory (19) są identyczne z wzorami eliminacji Gaussa dla macierzy

x_l^1	x_l^2		x_l^1		x_l^n	x_l^b
x_l^1	x_l^1		x_l^1		x_k^n	x_k^b
.	.	.	.	.	.	.
x_m^1	x_m^2		x_m^1		x_m^n	x_m^n
$f_1 - c_1$	$f_2 - c_2$		$f_1 - c_1$		$f_n - c_n$	f

(20)

z elementem centralnym x_k^1 .

Korzystając z tego faktu opisany algorytm sprowadzić można do metody kolejnych eliminacji Gaussa – z dodatkowym kryterium wyboru elementu centralnego postaci (17), (18). Z reguły wyniki obliczeń w tej metodzie przedstawiane zostały w postaci tzw. tablic simpleksowych, w których umieszcza się macierz (20) oraz pewne dodatkowe informacje, np. numery zmiennych bazowych. Zanim tablice te zostaną opisane, warto zastanowić się, co oznaczałoby, gdyby na pewnym etapie obliczeń okazało się, że wszystkie wartości $f_j - c_j$ z kryterium (17) były ujemne, bądź wszystkie elementy x_i^l z kryterium (18) były ujemne.

Otóż istnieje twierdzenie, które mówi, że brak dodatnich $f_j - c_j$ oznacza, iż znalezione rozwiązanie jest już optymalne, zaś brak dodatnich, że zadanie nie ma optimum skończonego i można znaleźć takie rozwiązanie, dla którego

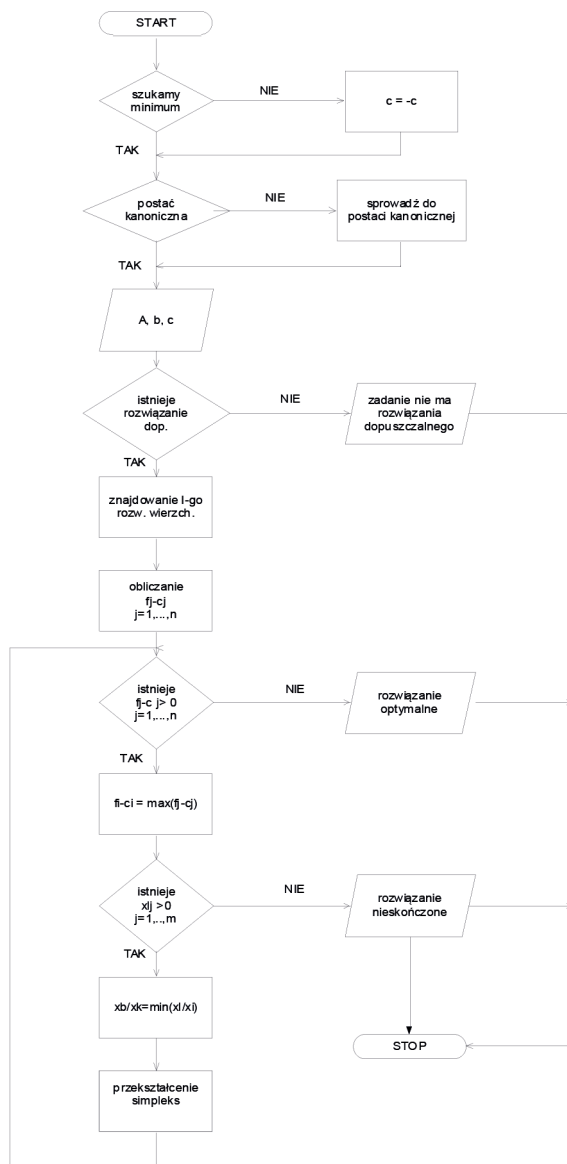
$$\min_{\vec{x}} f(\vec{x}) = -\infty.$$

W każdym wypadku niemożność spełnienia warunków (17), (18) oznacza zatem koniec obliczeń.

Analizując zależności (15) i (16) łatwo można znaleźć uzasadnienie dla powyższego twierdzenia. Zadanie to pozostawia się Czytelnikowi nadmieniając tylko, że jeśli wszystkie x_i^l są ujemne, to dopuszczalność nowego rozwiązania zapewnia dowolne $\theta > 0$. Wyniki obliczeń w kolejnych iteracjach algorytmu simpleksowego zapisane zostaną w postaci tablic simpleksowych zawierających macierz (20) oraz dodatkową kolumnę z numerami zmiennych wchodzących aktualnie do bazy.

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	...	$\vec{a}_m$	...	$\vec{a}_1$	...	$\vec{a}_n$	...	$\vec{a}_b$	<i>nr.zm. baz.</i>
x_1^1	x_1^2	...	x_1^m	...	x_1^1	...	x_1^n	...	x_1^b	1
x_2^1	x_2^2	...	x_2^m	...	x_2^1	...	x_2^n	...	x_2^b	2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_k^1	x_k^2	...	x_k^m	...	x_k^1	...	x_k^n	...	x_k^b	k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m^1	x_m^2	...	x_m^m	...	x_m^1	...	x_m^n	...	x_m^b	m
$f_1 - c_1$	$f_1 - c_2$	...	$f_m - c_m$	...	$f_1 - c_1$	...	$f_n - c_n$	...	f_b	

Tok postępowania ilustruje schemat blokowy z rysunku 13.



Rys. 13. Schemat blokowy algorytmu simpleks

Do pierwszej takiej tablicy wpisano po prostu elementy macierzy A (jeżeli wyjściowe rozwiązanie bazowe jest w niej zawarte), wektor wyrazów wolnych oraz w $(m+1)$ wierszu liczby $f_j - c_j$ i wartość początkową funkcji celu. Następnie dokonano wyboru elementu centralnego według reguł (17), (18) i wykonano na wszystkich elementach tablicy przekształcenia (19), z wyjątkiem kolumny numerów bazy.

Można go jednolicie zapisać w postaci

$$\begin{aligned} x_i^j &= x_i^l - \frac{x_k^j}{x_k^l} \cdot x_i^l, & i \neq k, \\ x_k^j &= \frac{x_k^j}{x_k^l}, \end{aligned} \quad (21)$$

dla $j = 1, \dots, n+1$ oraz $i = 1, \dots, m+1$.

Postępowano tak, aż do momentu niemożności spełnienia warunków (17), (18). Opisane reguły postępowania zilustrowano dodatkowo przy pomocy schematu blokowego algorytmu na rysunku 13. Dla dokładniejszego zapoznania się z techniką postępowania w algorytmie simpleks poniżej pokazano ją na przykładzie.

Przykład 1.

Znaleźć maksimum funkcji

$$\tilde{f} = 4x_1 + x_2,$$

przy warunkach

$$x_2 - x_1 \leq 5$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_2 + x_1 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 8$$

1. Maksimum $\tilde{f}$ zamieniono na minimum f

$$f = -4x_1 - x_2$$

2. Wprowadzono cztery zmienne osłabiające x_3, x_4, x_5, x_6 w celu sprowadzenia zadania do postaci kanonicznej:

$$f = -4x_1 - x_2 \Rightarrow \min$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$

$$x_2 + x_4 = 6,$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 10,$$

$$2x_1 - x_2 + x_6 = 8.$$

3. Skonstruowano pierwszą tablicę simpleksową:

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$	$\vec{b}$	BAZA
-1	1	1	0	0	0	5	3
0	1	0	1	0	0	6	4
1	1	0	0	1	0	10	5
2	-1	0	0	0	1	8	6
4	1	0	0	0	0	0	

Pierwsze rozwiązanie bazowe pojawiło się w naturalny sposób przez wprowadzenie zmiennych osłabiających. Pierwsza baza to: $\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6$. Odpowiadające jej rozwiązanie bazowe, to $u = (0, 0, 5, 6, 10, 8)$, wartość funkcji celu: $f(u) = 0$, ponieważ $f = -4x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$, czyli wskaźniki $f_j - c_j$ mają postać $(4, 1, 0, 0, 0, 0)$.

4. Kryterium (17): $\max(4, 1) = 4$, czyli do bazy wprowadzony będzie wektor $\vec{a}_1$.

5. Kryterium (18): $\min\left[\frac{10}{1}, \frac{8}{2}\right] = 4$, czyli z bazy wyrzucony zostanie wektor $\vec{a}_6$. Jako element centralny wybrano zatem x_4 .

6. Dokonano przekształcenia tablicy wedle (21).

7. Otrzymano nową tablicę simpleksową.

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$	$\vec{b}$	BAZA
0	1/2	1	0	0	1/2	9	3
0	1	0	1	0	0	6	4
0	3/2	0	0	1	-1/2	6	5
1	-1/2	0	0	0	1/2	4	1
0	3	0	0	0	-2	-16	

8. Postępując analogicznie jak w punktach 4, 5, 6 otrzymano trzecią tablicę simpleksową:

$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$	$\vec{b}$	BAZA
0	0	1	0	-1/3	2/3	7	3
0	0	0	1	-2/3	1/3	2	4
0	1	0	0	2/3	-1/3	4	2
1	0	0	0	1/3	1/3	6	1
0	0	0	0	-2	-1	-28	

Tablica ta nie zawiera dodatnich $f_j - c_j$, co oznacza, że znaleziono rozwiązanie optymalne:

$$x_1 = 6, x_2 = 4, x_3 = 7, x_4 = 2, x_5 = x_6 = 0.$$

Wartość funkcji celu: $f = -28$.

Tak więc ostatecznym rozwiązaniem zadania jest

$$x_1 = 6, x_2 = 4, \tilde{f}_{\max} = 28.$$

W ramach ćwiczeń, warto rozwiązać to zadanie metodą graficzną i prześledzić, które z wierzchołków zbioru dopuszczalnego były wybrane stosując algorytm simpleks. Teraz zostanie pokazane, rozwiązanie przy pomocy pakietu Excel dla zadania w pierwotnej postaci przykładu 1 (standardowej). Zarówno postać danych wejściowych, jak i wyniki są w układzie identycznym do przedstawionego wcześniej. Jest to możliwe, ponieważ zadanie ma dokładnie taki sam wymiar, jak zadanie z przykładu w rozdziale 3 – dwie zmienne i cztery ograniczenia. Poniższe rysunki zawierają opisane informacje. W komórce F4 znajduje się suma komórek B4 oraz C4.

The background spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	x	0	0						
3	c	4	1			f			
4	CX	0	0			0			
5					Ax	<	b		
6	A	-1	1		0		5		
7		0	1		0	<	6		
8		1	1		0		10		
9		2	-1		0		8		

The Solver Parameters dialog box is configured as follows:

- Ustaw cel:** \$F\$4
- Na:** ☒ Maks ☐ Min ☐ Wartość
- Przez zmienianie komórek zmiennych:** x
- Podlegających ograniczeniom:**
 - Ax <= b
 - x >= 0
- ☒ Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń
- Wybierz metodę rozwiązywania:** Nieliniowa GRG
- Metoda rozwiązywania:** W przypadku gładkich nieliniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat nieliniowy GRG. Dla liniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat LP simpleks, natomiast w przypadku problemów, które nie są gładkie, wybierz aparat ewolucyjny.

Rys. 14. Dane wejściowe i definicja obliczenia dla zadania z przykładu 1

Na rys. 14 widać składowe zadania – wektory $\vec{c}$, $\vec{x}$ (z wartościami początkowymi $(0,0)$), funkcję celu $f = 0$, elementy macierzy A oraz wektor ograniczeń $\vec{b}$.

Komórka celu (Maks)

Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa
\$F\$4	cx f	0	28

Komórki zmiennych

Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa	Całkowite
\$B\$2	x	0	6	Ciągłe
\$C\$2	x	0	4	Ciągłe

Ograniczenia

Komórka	Nazwa	Wartość komórki	Formuła	Stan	Zapas czasu
\$E\$6	A Ax	-2	\$E\$6<=\$G\$6	Niewiążące	7
\$E\$7	Ax	4	\$E\$7<=\$G\$7	Niewiążące	2
\$E\$8	Ax	10	\$E\$8<=\$G\$8	Wiążące	0
\$E\$9	Ax	8	\$E\$9<=\$G\$9	Wiążące	0
\$B\$2	x	6	\$B\$2>=0	Niewiążące	6
\$C\$2	x	4	\$C\$2>=0	Niewiążące	4

Rys. 15. Wyniki obliczeń dla zadania z poprzedniego rysunku

W arkuszu wyników można znaleźć wartości optymalne zmiennych decyzyjnych $x_1 = 6$ oraz $x_2 = 4$ oraz maksymalną wartość funkcji celu $f = 28$.

5.3. PIERWSZE ROZWIĄZANIE BAZOWE

Dotychczas zakładano, że zadanie programowania liniowego jest tak sformułowane, iż macierz A zawiera macierz jednostkową, która wyznacza pierwsze rozwiązanie bazowe. Bardzo często tak się zdarza, zwłaszcza, gdy pierwotna postać zadania jest standardowa. Wtedy wprowadzenie zmiennych osłabiających może wyznaczyć automatycznie pierwsze rozwiązanie bazowe (porównaj przykład 1). Jeżeli jednak nie wszystkie elementy wektora wyrazów wolnych w (8) są dodatnie, to zmienne osłabiające należy odejmować i wyboru pierwszej bazy dokonać trzeba w inny sposób. W zasadzie istnieją dwie możliwości.

Metoda bazy naturalnej

Z macierzy $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ należy wybrać m wektorów liniowo niezależnych $B = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m]$ i pomnożyć elementy wyjściowego zadania przez macierz B^{-1} w następujący sposób:

$$B^{-1} \cdot [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m | \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_n | \vec{b}] = [\vec{x} | \vec{x}^{m+1}, \dots, \vec{x}^n | \vec{x}^b],$$

otrzymując pierwszą tablicę simpleksową. W przypadku zadania dużych wymiarów wybór m liniowo niezależnych wektorów jest sprawą skomplikowaną i wtedy stosuje się tak zwaną bazę sztuczną.

Metoda bazy sztucznej

Do macierzy A należy dołączyć macierz jednostkową o wymiarze $m \times m$. To znaczy, że wprowadzono m nowych zmiennych dodatnich $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, takich, że każdej z nich odpowiada współczynnik funkcji celu równy K . Zakłada się, że K choć nieznane jest bardzo duże:

$$K \gg c_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Współczynniki K nazywają się **karami** (stąd jedna z nazw tej metody: *metoda kar*). Nazwa *kara* bierze się stąd, iż za fakt wprowadzania do bazy sztucznych zmiennych wiąże się z karą w postaci bardzo dużej wartości funkcji celu – bardzo odległej od minimum. Jako pierwszą bazę używa się w tej metodzie bazę utworzoną ze zmiennych sztucznych. Odpowiada jej wartość funkcji celu $f = K \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i$, która jest bardzo duża.

Jeśli pierwotna postać zadania była:

$$f = [c_1, \dots, c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \min \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

to po wprowadzeniu sztucznej bazy sprowadza się ona do:

$$f = [c_1, \dots, c_n, K, \dots, K] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{bmatrix} \Rightarrow \min \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_{m+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jako pierwsze rozwiązanie przyjmuje się takie, w którym bazę stanowią wektory sztuczne. Odpowiada mu wartość funkcji celu $f = K \sum_{i=n+1}^{m+n} x_i$, która jest bardzo duża. Jest to kara, jaka pojawia się w wyniku łatwości uzyskania pierwszego rozwiązania. Ale można spodziewać się też nagrody. Mianowicie dokonując na (23) przekształceń simpleksowych uzyskuje się pewność, że wektor sztuczny, który został wyeliminowany z bazy nigdy już do niej nie wróci, ponieważ wyboru wektora do bazy dokonano według wartości wskaźnika

$$f_j - c_j, \text{ a dla wektorów sztucznych } f_j - c_j = f_j - K,$$

co wobec bardzo dużego dodatniego K zawsze można traktować jako ujemne. W ten sposób po m -krotnym przekształceniu simpleksowym wszystkie wektory sztuczne zostają wyeliminowane i znaleziona zostaje baza naturalna.

Nie wchodząc w szczegóły dotyczące zagadnienia sztucznej bazy można stwierdzić, że jest ona częstą metodą uzyskiwania pierwszego rozwiązania

oraz, że umożliwia stwierdzenie czy dane zadanie w ogóle posiada rozwiązania dopuszczalne.

5.4. DUALNOŚĆ W PROGRAMOWANIU LINIOWYM

Problem dualizmu we wszystkich zagadnieniach optymalizacji jest zagadnieniem o ogromnej wadze teoretycznej i praktycznej. Wiele twierdzeń udowadnia się korzystając z postaci zagadnień dualnych i wiele algorytmów obliczeniowych opiera się o dualną postać zadania [7], [28], [32].

Omawiając w tym paragrafie pojęcie dualizmu należy postawić sobie za cel najbardziej ogólne i jakościowe naświetlenie zagadnienia, które każdemu, kto zajmuje się programowaniem matematycznym nie może być obce. Ramy tego opracowania nie pozwalają jednak wchodzić w szczegóły. Wydaje się, że Czytelnik, który podczas kursu matematyki zetknął się z metodą mnożników Lagrange'a znajdowania ekstremum warunkowego funkcji wielu zmiennych, nie powinien mieć trudności ze zrozumieniem materiału zawartego w tej części. Zadanie programowania liniowego zapisano w postaci kanonicznej:

$$f = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \Rightarrow \min \quad (24)$$

przy ograniczeniach $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$.

Do każdego tego typu zadania sformułować można odpowiadające mu **zadanie dualne** postaci:

$$g = \vec{b}^T \cdot \vec{y} \Rightarrow \min \quad (25)$$

$$A^t \vec{y} \leq \vec{c}, \text{ gdzie } \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

jest wektorem **decyzyjnych zmiennych dualnych** (które nie muszą spełniać warunku nieujemności). Pojęcie dualności jest symetryczne tzn. (25) jest zadaniem dualnym do (24), a (24) do (25). Między parą zadań dualnych (24), (25) istnieje związek wyrażony następującym **Twierdzeniem o dualności**:

1. Jeśli jedno z pary zadań nie ma rozwiązania optymalnego skończonego, to drugie jest niedopuszczalne.
2. Jeśli jedno z pary zadań ma skończone rozwiązanie optymalne, to oba mają rozwiązania optymalne i rozwiązania te są równe:

$$\min_{\vec{x}} f(\vec{x}) = \max_{\vec{y}} g(\vec{y}).$$

Dowód tego twierdzenia zostanie pominięty [32].

Wynika z niego, że rozwiązanie jednego z pary zadań dualnych obnaża wszystkie informacje o drugim zadaniu. W szczególności można udowodnić, że optymalne rozwiązanie dualne wyraża się następująco, przez optymalne rozwiązanie pierwotne:

$$\vec{y}_0^T = \vec{c}_r^T \cdot B^{-1} \quad (26)$$

W wyrażeniu tym B jest macierzą utworzoną z pierwotnej (wyjściowej) postaci wektorów bazowych optymalnego rozwiązania zadania (24) zaś $\vec{c}_r$ jest wektorem współczynników funkcji celu f zredukowanym do ostatnich zmien-nych bazowych.

Przykład:

Wcześniej rozwiązano metodą simpleks następujące zadanie

$$\begin{aligned} -4x_1 - x_2 &\Rightarrow \min, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_2 + x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_6 &= 8, \\ \vec{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem optymalnym było $x^T = (6, 4, 2, 7, 0, 0)$, $f_{\min} = -28$

Ostatnią bazę tworzyły wektory $\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_2, \vec{a}_1$.

Zadaniem dualnym jest:

$$\begin{aligned} g &= 5y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 8y_4 \Rightarrow \max \\ -y_1 + y_3 + 2y_4 &\leq -4 \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 &\leq -1 \\ y_1 &\leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0, y_4 \leq 0 \end{aligned}$$

$B = [\vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_2, \vec{a}_1]$, gdzie $\vec{a}_i$ wzięte jest z pierwszej tablicy simpleksowej:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_{opt}^T = [0, 0, -1, -4] \cdot B^{-1} = [0, 0, -2, -1], \quad g_{min} = f_{max} = -28$$

Macierz B^{-1} zawarta jest w ostatniej tablicy simpleksowej w kolumnach, które w pierwszej tablicy simpleksowej zawierały zmienne bazowe (kolumny 3, 4, 5, 6). Jest to szczególnie przypadek metody eliminacji Gaussa odwracania macierzy. Tak więc, rozwiązując jedno z pary zadań dualnych, rozwiązanie zostaje jednocześnie drugie. Podane twierdzenie oraz przykład powinny przekonać Czytelnika o znaczeniu pojęcia dualności. Należy jednak dodać, iż z pragmatycznego punktu widzenia można powiedzieć, że w wielu wypadkach znacznie wygodniej jest rozważać, oraz znacznie łatwiej rozwiązywać zadanie dualne, odwlekając ostateczne rozwiązanie zadania pierwotnego do skorzystania z twierdzenia o dualności i wzoru (26). Dualność ma ponadto ważną interpretację ekonomiczną, która zostanie zaprezentowana poniżej.

W większości wypadków zastosowań programowania liniowego do optymalizacji działalności ekonomicznej, funkcja celu reprezentuje wyniki tej działalności. Warunki natomiast reprezentują ograniczone środki na prowadzenie działalności. Mówi się wówczas o optymalizacji wyników przy ograniczonych nakładach, czyli jest to klasyczny problem maksymalizacji zysku. Postać zadania dualnego wskazuje, że dotyczy ono optymalizacji nakładów przy ograniczonych wynikach. Jest to stwierdzenie bardzo ogólne, niemniej oddaje istotę zagadnienia. Dokładna interpretacja zadania dualnego wymaga szczegółowej analizy w każdym konkretnym przypadku.

Na zakończenie zostanie pokazany w sposób jakościowy związek między problemem dualności, a wspomnianą metodą mnożników Lagrange'a. Dostrzeżenie tego związku pozwala uświadomić sobie źródło dualizmu. Jak wiadomo, metoda mnożników Lagrange'a pozwala zamienić problem znajdowania ekstremum warunkowego funkcji wielu zmiennych na zagadnienie znajdowania ekstremum bezwarunkowego pewnej nowej funkcji [32].

Na przykład, należy znaleźć ekstremum $F(\vec{x})$ przy warunkach

$$g_1(\vec{x}) = 0, g_2(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0 \quad (27)$$

Wprowadzona zostaje nowa funkcja $L(\vec{x}) = F(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x})$ zwana funkcją Lagrange'a. Znajdowanie ekstremum $F(\vec{x})$ przy warunkach (27) równoważne jest znajdowaniu ekstremum bezwarunkowego $L(\vec{x})$ traktowanej jako funkcja $(\vec{x})$. Warunkiem koniecznym uzyskania ekstremum jest:

$$\text{grad } L(\vec{x}) = 0 \quad (28)$$

Układ równań (28) (n równań) jest układem nieokreślonym, ponieważ nie są znane wartości m nieoznaczonych mnożników Lagrange'a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Można jednak dołączyć m równań (27) i uzyskać układ $n+m$ równań o $n+m$ niewiadomych $(\vec{x}, \vec{\lambda})$. Okazuje się, że jeśli rozważyć funkcję Lagrange'a od początku jako funkcję $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$, to punkt wyznaczony równaniami (27) i (28), jest jej punktem siodłowym (minimum względem zmiennej $\vec{x}$, maksimum względem $\vec{\lambda}$). Z punktu widzenia funkcji Lagrange'a nie ma żadnej różnicy jakościowej między zmiennymi $\vec{x}$ i $\vec{\lambda}$. Są one po prostu argumentami funkcji L , dla której szukany jest punkt siodłowy. Zmienne $\vec{x}$ i $\vec{\lambda}$ stanowią parę zmiennych dualnych – wektor $\vec{y}$ w zagadnieniu dualnym (25) jest niczym innym, jak wektorem zmiennych dualnych odpowiedniej funkcji Lagrange'a. Rozwiązywanie któregośkolwiek z pary zadań dualnych jest równoważne znajdowaniu punktu siodłowego tej funkcji. Zagadnienie przedstawione zostało w sposób bardzo uproszczony. Gdy ograniczenia dane są w postaci nierówności, a dla odpowiednich zmiennych stawiany jest warunek nieujemności, warunki konieczne istnienia punktu siodłowego są bardziej skomplikowane niż (27) i (28). Ogólna postać tych warunków jest znana jako tzw. twierdzenie Kuhna-Tuckera [32].

Na zakończenie tego rozdziału przedstawiony zostanie przykład formułowania zadania dualnego. Pokazane zostanie dokładnie, jak na podstawie optymalnego rozwiązania zadania dualnego uzyskać rozwiązanie optymalne zadania pierwotnego x^* . Dane jest następujące zadanie pierwotne:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 0x_5 \rightarrow \max \\ -0,5x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &\leq 2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 \geq -3 \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5$$

Aby utworzyć zadanie dualne należy w pierwszej kolejności zadbać o to, aby wszystkie nierówności występujące w ograniczeniach zadania pierwotnego miały znaki skierowane w tę samą stronę. W tym celu należy na przykład pomnożyć ograniczenia (2) przez -1 . Wówczas zadanie przyjmie postać:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$

$$-0,5x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leq 2 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 \leq 3 \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5$$

Zgodnie ze wskazaniem zawartym wcześniej, zostało zbudowane zadanie dualne, mianowicie:

$$f(y_1, y_2) = 2y_1 + 3y_2 \rightarrow \min$$

$$-0,5y_1 - y_2 \geq -4 \quad (1)$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 6 \quad (2)$$

$$-y_1 - 2y_2 \geq -4 \quad (3)$$

$$-y_1 \geq -2 \quad (4)$$

$$-y_1 + y_2 \geq 0 \quad (5)$$

W zadaniu dualnym nie trzeba zakładać nieujemności zmiennych decyzyjnych. Rozwiązując powyższy problem (np. metodą graficzną) otrzymuje się: $y_1 = 1,2$, $y_2 = 1,2$ oraz $g(y_1, y_2)$. Uzyskany wynik należy wstawić kolejno do wszystkich ograniczeń w zadaniu dualnym. Jeżeli któreś z ograniczeń będzie spełnione w sposób ostry, wówczas zmienna odpowiadająca temu ograniczeniu w zadaniu pierwotnym będzie równa zero. I tak:

$$\text{w ograniczeniu (1)} \quad -1,8 > 4, \text{ zatem} \quad x_1 = 0,$$

$$\text{w ograniczeniu (2)} \quad 6 = 6, \text{ zatem} \quad x_2 \neq 0,$$

w ograniczeniu (3) $-3,6 > 2$, zatem $x_3 = 0$,

w ograniczeniu (4) $-1,2 > 2$, zatem $x_4 = 0$,

w ograniczeniu (4) $0 = 0$ zatem $x_5 \neq 0$.

Otrzymane w ten sposób wartości zerowe odpowiednich zmiennych x wstawiane są do ograniczeń zadania pierwotnego. Układ równań przyjmuje wówczas postać:

$$\begin{cases} 3x_2 - x_5 = 2 \\ -2x_2 - x_5 = -3 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest: $x_2 = 1$, $x_5 = 1$. Zatem rozwiązanie zadania pierwotnego to:

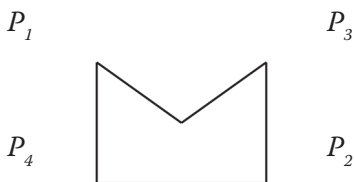
$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \text{ i } f(0,1,0,0,1)=6.$$

5.5. PYTANIA I ĆWICZENIA

1. Które ze zbiorów na rysunku są wypukłe?



2. Narysować zbiór kombinacji wypukłych punktów P_1, P_2, P_3, P_4 .



3. Czy wektory: $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ są liniowo zależne?

4. Czy następujące zadanie programowania liniowego napisane jest w postaci kanonicznej?

$$f = -5 \Rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 = -1$$

5. Co to jest baza, zmienna bazowa, zmienna niebazowa, zmienna osłabiająca i zmienna sztuczna?
6. Kiedy rozwiązanie bazowe jest rozwiązaniem wierzchołkowym?
7. Jaki wierzchołek nazywany jest zdegenerowanym?
8. Co to jest zmienna dualna?
9. Jaki związek istnieje między parą zadań dualnych, a funkcją Lagrange'a?
10. Czym wyróżnia się simpleks spośród wszystkich zbiorów wypukłych w przestrzeni n -wymiarowej?
11. Wyznaczyć metodą eliminacji Gaussa macierze odwrotne do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i obliczyć wyznaczniki tych macierzy.

12. W układzie równań

$$2x_1 - x_3 - x_4 = 4$$

$$x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3$$

wyznaczyć rozwiązanie bazowe ze zmiennymi x_1, x_2 a następnie wyeliminować z bazy x_1 i wprowadzić do bazy x_4 .

13. Sprowadzić do postaci kanonicznej i rozwiązać metodą simpleks oraz metodą graficzną następujące zadania programowania liniowego:

$$a) \quad f = 2x_2 - x_1 \Rightarrow \min$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$\vec{x} \geq 0$$

$$b) \quad f = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \min$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$\vec{x} \geq 0$$

$$c) \quad f = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \min$$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$5x_1 - x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$d) \quad f = 8x_1 + 10x_2 \Rightarrow \min$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_2 - 2x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

14. Rozwiązać metodą graficzną zadanie

$$f = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \Rightarrow \max$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$-x_1 + 5x_2 + x_4 = 37$$

$$5x_1 + x_2 + x_5 = 49$$

$$3x_1 - 4x_2 + x_6 = 11$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_7 = 19$$

$$\vec{x} \geq 0$$

15. Rozwiązać metodą simpleks zadanie z przykładu z rozdziału 2.

16. Pokazać, że zadanie (24) jest dualne do (25).

Wskazówka: Sprowadzić najpierw (25) do postaci kanonicznej z warunkiem nieujemności, przez wprowadzenie nowych zmiennych.

17. Napisać zadania dualne do zadań 13 a– d i znaleźć ich rozwiązania.

18. Napisać funkcję Lagrange'a dla zadania 14.

19. Dyrekcja przedsiębiorstwa produkującego kosmetyki, rozważa wprowadzenie na rynek trzech nowych produktów: toniku, kremu i szamponu. Do produkcji tych wyrobów używa się między innymi dwóch składników, które są limitowane. Są to algi morskie, których zapasy wynoszą 36 kg oraz olejek różany, którego zasoby wynoszą 48 kg. Normy zużycia surowców do produkcji odpowiedniego kosmetyku zawiera tabela.

Surowce	Zużycie surowców (w kg/1 sztukę wyrobu)		
	Tonik	Krem	Szampon
Olejek różany	0,05	0,03	0
Algi morskie	0,01	0,02	0,04

Zysk osiągany ze sprzedaży toniku wynosi 5 zł, ze sprzedaży kremu 12 zł, a szamponu 6 zł. Które z kosmetyków i w jakich ilościach powinno produkować przedsiębiorstwo, aby osiągnąć maksymalny zysk?

- zbudować model matematyczny zadania.
 - skonstruować zadanie dualne do zadania pierwotnego i rozwiązać je metodą geometryczną oraz przy pomocy arkusza kalkulacyjnego MS Excel.
 - podać rozwiązanie programu pierwotnego.
 - czy zwiększając dwukrotnie limity produktów przedsiębiorstwo osiągnie dwukrotnie większy zysk?
20. Zakład cukierniczy produkuje trzy rodzaje cukierków: czekoladki, landrynki i krówki. Każdy z trzech typów cukierków podlega obróbce kolejno w trzech wydziałach produkcyjnych, których dopuszczalny czas pracy jest związany z liczbą pracujących robotników. I tak w pierwszym wydziale produkcyjnym pracuje 120 osób, w drugim 100 osób, a w trzecim 40 osób. Zakłada się, że czas pracy robotnika to dokładnie 8 godzin dziennie. W poniższej tabeli przedstawiono nakład czasu pracy na jednostkę wyrobu (w godz.) na wydziale.

	Nakład czasu pracy na jednostkę wyrobu (w godz.)		
	Wydział I	Wydział II	Wydział III
Czekoladki	8	8	4
Landrynki	6	4	3
Krówki	1	3	1

Zysk jednostkowy ze sprzedaży poszczególnych typów cukierków to: czekoladki-6 zł, landrynki-3zł, krówki-2zł. Ustalić optymalną strukturę produkcji gwarantującą maksymalny zysk.

- sformułować model matematyczny zadania,
- rozwiązać zadanie za pomocą pakietu Excel

Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

- w wydziale II i w wydziale III liczba pracowników wzrośnie o 10?
- zysk z produkcji landrynek wzrośnie do 3 zł?

21. Zakład mleczarski wytwarza jogurt, do którego produkcji może użyć trzech rodzajów owoców: malin, jabłek lub moreli. Owoce te różnią się między sobą składem substancji odżywczych i ceną, co prezentuje tabela:

Owoce	Cena za 1 kg (w zł)	Zawartość procentowa składników odżywczych			
		Cukier	Sole mineralne	Białko	Witaminy
Maliny	2	25	8	20	8
Jabłka	1	12	10	15	8
Morele	4	10	4	20	12

Kierownik produkcji zastanawia się, które owoce i w jakiej ilości stosować do produkcji jogurtu, aby miał określone wartości odżywcze i jego produkcja była jak najtańsza. Jogurt powinien zawierać, co najwyżej 14% cukru, nie więcej niż 6% soli mineralnych, co najmniej 23% białka i co najmniej 10% witamin.

- sformułować model matematyczny zadania,
- rozwiązać zadanie za pomocą pakietu Excel,

Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

- obniżony zostanie wymóg dotyczący minimalnej zawartości witamin do 8%?
- cena moreli wzrośnie do 6 zł za kg?

22. Organizm mężczyzny pracującego fizycznie wymaga dostarczenia dziennie, co najmniej 1000 jednostek witaminy A i co najmniej 2000 jednostek witaminy C. W tablicy podano zawartość witamin w 1 kg niektórych produktów oraz ceny tych produktów. Należy tak zaplanować zakup produktów, aby łączny koszt zakupów był najniższy.

witaminy	mleko	jablka	ziemniaki	chleb
witamina A	3	3	4	0
witamina C	1	5	0	5
cena 1kg (w zł)	0,9	1,5	1,2	1

- zbudować model matematyczny zadania,
 - skonstruować zadanie dualne do zadania pierwotnego i rozwiązać je metodą geometryczną oraz przy pomocy arkusza kalkulacyjnego MS Excel,
 - podać rozwiązanie programu pierwotnego.
- Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:
- cena jabłek wzrośnie do 5,5 zł?
 - zmniejszone zostaną o połowę wymagane dzienne normy jednostek witaminy A i C.

Odpowiedzi:

- Tak, wektory są liniowo zależne, bo $\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- Tak

$$11. \det A = -\frac{1}{45}, A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{8}{45} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\det B = 1, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13.

$$a) x_1 = \frac{3}{4}; x_2 = \frac{2}{3}; f_{\min} = 0$$

$$b) x_1 = \frac{8}{5}; x_2 = \frac{3}{5}; f_{\min} = 5$$

c) $x_1 = 3; x_2 = 0; f_{\min} = 6$

d) $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 0; f_{\min} = 4$

14.

$$x_1^* = 8; x_2^* = 9; x_3^* = 9; x_4^* = 0; x_5^* = 0; x_6^* = 23; x_7^* = 41; f_{\max} = 60$$

17.

a) $y_1^* = 0, y_2^* = 0; y_3^* = 1; g_{\max} = 0$

b) $y_1^* = \frac{1}{2}, y_2^* = \frac{1}{2}; g_{\max} = 5$

c) $y_1^* = 0, y_2^* = 0; y_3^* = 1; y_4^* = 0, g_{\max} = 6$

d) $y_1^* = 4, y_2^* = 0; g_{\max} = 4$

19.

b) $y_1^* = 300; y_2^* = 150; g_{\min} = 19\,800 \text{ zł}$

c) $x_1^* = 0; x_2^* = 1600; x_3^* = 100; f_{\max} = 19\,800 \text{ zł}$
(firma nie produkuje toniku).

d) Tak, $x_1^* = 0; x_2^* = 3200; x_3^* = 200; f_{\max} = 39\,600 \text{ zł}$

20.

b) $x_1^* = 40; x_2^* = 0; x_3^* = 160; f_{\max} = 560 \text{ zł}$
(zakład nie produkuje landrynek).

c) Tak, $x_1^* = 80; x_2^* = 0; x_3^* = 80; f_{\max} = 640 \text{ zł}$

d) Tak, $x_1^* = 0; x_2^* = 32; x_3^* = 224; f_{\max} = 576 \text{ zł}$

21.

b) $x_1^* = 0,129; x_2^* = 0,126; x_3^* = 0,926; f_{\min} = 4,089 \text{ zł}$

c) Nie

d) Nie, jedynie funkcja celu przyjmie wyższą wartość, mianowicie $f_{\min} = 5,942 \text{ zł}$

22.

b) $y_1^* = \frac{1}{6}; y_2^* = \frac{1}{5}; g(y^*) = 566 \frac{2}{3}$

c) $x_1^* = 0; x_2^* = 333 \frac{1}{3}; x_3^* = 0; x_4^* = 66 \frac{2}{3}; f(x^*) = 566 \frac{1}{3}$

d) Tak, $x_1^* = 333 \frac{1}{3}; x_2^* = 0; x_3^* = 0; x_4^* = 333 \frac{1}{3}; f(x^*) = 633 \frac{1}{3}$

e) Tak, $x_1^* = 0; x_2^* = 166 \frac{2}{3}; x_3^* = 0; x_4^* = 33 \frac{1}{3}; f(x^*) = 283 \frac{1}{3}$

6. PROGRAMOWANIE ILORAZOWE

6.1. WPROWADZENIE

W wielu zastosowaniach praktycznych sformułowanie i rozwiązanie matematycznego modelu postawionego zagadnienia komplikuje się na skutek istnienia więcej niż jednego kryterium optymalności. Co więcej, w realnych sytuacjach może się zdarzyć, że między kryteriami występuje konflikt taki, że poprawie jednego kryterium towarzyszy jednocześnie pogorszenie wartości innego kryterium lub kryteria są w ogóle nieporównywalne. W takich warunkach rozsądnym podejściem jest szukanie optymalnego kompromisu. Przyjmuje się jednocześnie dwa kryteria optymalizacji. Przykładowo, przedsiębiorstwo chce zmaksymalizować wydajność produkcji biorąc również pod uwagę minimalizację kosztów nakładów własnych. Jednym ze sposobów radzenia sobie z dwoma rozbieżnymi celami jest skonstruowanie funkcji kryterium w postaci ilorazu dwóch funkcji liniowych. Stąd właśnie wywodzi się nazwa Programowanie ilorazowe (PI). Najczęściej w liczniku ilorazowej funkcji celu umieszcza się funkcję, która podlega maksymalizacji, natomiast w mianowniku tę, która będzie minimalizowana. Dla tak skonstruowanego ułamka szukane jest rozwiązanie optymalne, przy zadanych warunkach brzegowych i ograniczeniach liniowych.

6.2. SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO ZADANIA.

Model matematyczny zadania Programowania ilorazowego zaprezentowano poniżej. Niech:

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \rightarrow \max$$

$$g_2(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \rightarrow \min.$$

gdzie: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

Ilorazowa funkcja celu ma zatem postać:

$$G(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \rightarrow \max, \quad (1)$$

przy czym funkcja $g_2(x)$ nie może być tożsamościowa równa zeru.

Ograniczenia liniowe i warunki brzegowe można zapisać w następujący sposób:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

Należy zauważyć, że punkt x_{opt} , który jest rozwiązaniem optymalnym zadania PI, nie jest punktem, w którym funkcja $g_1(x)$ osiąga swoje maksimum a funkcja $g_2(x)$ minimum. Trzeba również podkreślić, że w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych taki punkt w ogóle nie istnieje, a punkt, który jest rozwiązaniem optymalnym zadania PI nazywany jest tzw. rozwiązaniem kompromisowym.

6.3. PROGRAMOWANIE ILORAZOWE W PRZYKŁADACH

Przykład 1.

Przedsiębiorstwo produkuje szafy i stoły, które są przeznaczone na eksport. Do wyprodukowania tych wyrobów zużywa różnych gatunków drewna, między innymi drewna dębowego, którego zasoby są limitowane w skali kwartalnej. Limit ten wynosi 900 jednostek. Aby wyprodukować szafę potrzebne są 3 jednostki drewna dębowego, natomiast do produkcji stołu zużywa się 1 jednostkę tego drewna. Z kolei czas pracy specjalnej maszyny zajmującej się obróbką drewna jest obliczony na co najwyżej 900 godzin. Po upływie tego czasu niektóre części maszyny ulegają całkowitemu zużyciu. Aby wyprodukować szafę maszyna pracuje 1 godzinę, stół - 3 godziny. Do nadzoru maszyny przy produkcji stołów i szaf zakład potrzebuje dokładnie po jednej osobie, podczas gdy ma ich do dyspozycji 400. Przedsiębiorstwo otrzymało dotychczas zamówienie na 100 sztuk stołów i 50 sztuk szaf. Ceny eksportowe wynoszą odpowiednio 200 zł dla szafy i 100 zł dla stołu. Natomiast koszt produkcji wyrażony w złotych to 300 zł dla szafy i 200 zł dla stołu. Podać optymalną strukturę produkcji kierując się kryteriami maksymalnego przychodu w złotych oraz minimalnego kosztu produkcji. Ile przychodu w złotych przypada na 1 zł kosztów własnych przy optymalnym rozwiązaniu?

Rozwiązanie:

Jak wynika z treści zadania, postawiono w nim dwa cele równocześnie - maksymalizację wpływów i minimalizację kosztów własnych przedsiębiorstwa. Przyjęto następujące oznaczenia:

x_1 – wielkość produkcji szaf,

x_2 – wielkość produkcji stołów.

Należy zatem ustalić takie wielkości produkcji obu wyrobów, aby spełnione były oba kryteria optymalizacji jednocześnie. Postawione w zadaniu cele zostały zapisane w postaci funkcji:

$$g_1(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2 \rightarrow \max \text{ (przychodów),}$$

$$g_2(x_1, x_2) = 300x_1 + 200x_2 \rightarrow \min \text{ (kosztów własnych).}$$

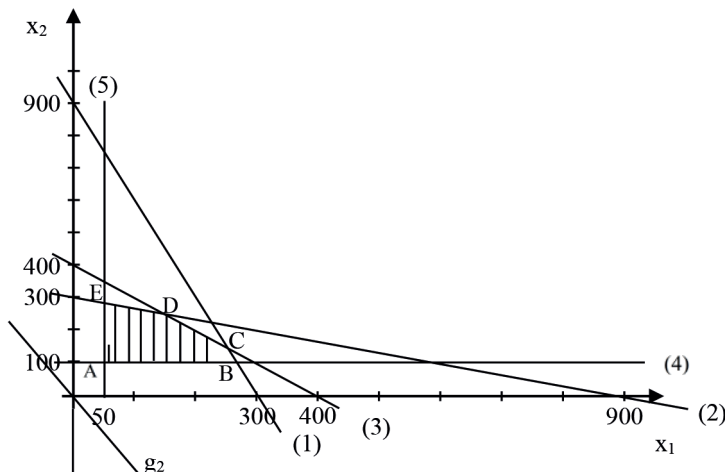
Funkcję, która da kompromis tych dwóch kryteriów można zapisać w postaci:

$$G(x_1, x_2) = \frac{200x_1 + 100x_2}{300x_1 + 200x_2} \rightarrow \max$$

Maksymalizowany jest więc przychód, jaki przypada na 1 zł kosztów własnych przedsiębiorstwa. Uwzględniono przy tym również ograniczenia wynikające z treści zadania:

- | | | |
|-----|-----------------------|-----------------------|
| (1) | $3x_1 + x_2 \leq 900$ | (drewno dębowe) |
| (2) | $x_1 + 3x_2 \leq 900$ | (maszyna) |
| (3) | $x_1 + x_2 \leq 400$ | (nadzór) |
| (4) | $x_1 \geq 50$ | (zamówienia na szafy) |
| (5) | $x_2 \geq 100$ | (zamówienia na stoły) |

Ograniczenia (1) – (5) zostały wykreślone w układzie współrzędnych, dzięki czemu otrzymano zbiór rozwiązań dopuszczalnych (zakreskowany obszar na rysunku poniżej).



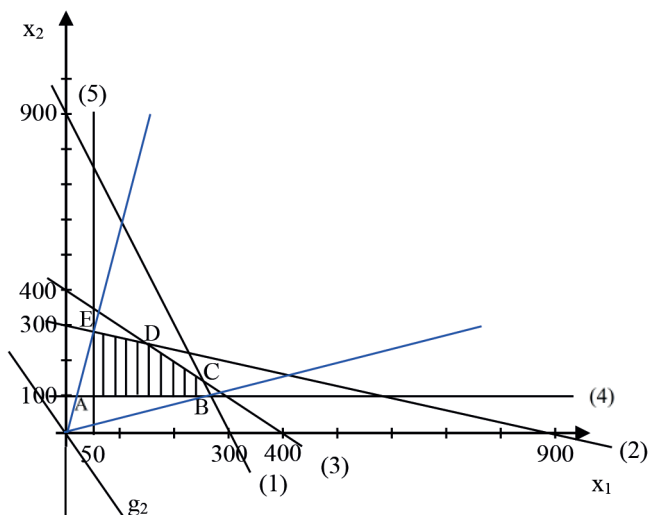
Rys. 16. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla zadania z przykładu 1

Należy teraz sprawdzić, czy funkcja, która jest w mianowniku kryterium ilorazowego tj. $g_2(x_1, x_2)$ ma punkty wspólne ze zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. Jeśli nie ma, oznacza to, że zadanie jest sformułowane poprawnie. Jak widać na rysunku $g_2(x_1, x_2)$ nie ma punktów wspólnych z pięciobokiem $ABCDE$.

Należy teraz znaleźć punkt przecięcia prostych g_1 i g_2 . W tym celu zostanie rozwiązany układ równań:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = 0, \\ g_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} 200x_1 + 100x_2 = 0, \\ 300x_1 + 200x_2 = 0 \end{cases}$$

Jak widać rozwiązaniem tego układu jest: $x_1 = 0, x_2 = 0$. Otrzymano zatem punkt $P(0,0)$ Wokół tego punktu obrócono $g_2(x_1, x_2)$, dzięki czemu uzyskano proste przechodzące przez punkty skrajne zbioru rozwiązań dopuszczalnych, tj. punkty B i E , co prezentuje rys. 17.



Rys. 17. Punkty skrajne zbioru rozwiązań dopuszczalnych

Jeden z tych punktów będzie rozwiązaniem optymalnym postawionego zadania. Współrzędne punktów B i E można wyznaczyć graficznie na podstawie rys. 16 lub rozwiązując układy równań złożone z odpowiednich ograniczeń. Dla punktu B będą to ograniczenia (1) i (4), dla E (2) i (5). Otrzymane wyniki to współrzędne punktu B: $x_1 = 266,66$, $x_2 = 100$, oraz współrzędne punktu E: $x_1 = 50$, $x_2 = 283,33$.

Należy teraz sprawdzić wartości funkcji celu w punktach B i E, mianowicie

$$G(B) = \frac{63332}{99998} = 0,63 \text{ oraz } G(E) = \frac{38333}{71666} = 0,53.$$

Ponieważ $G(B) > G(E)$, to w punkcie B znajduje się rozwiązanie optymalne postawionego zadania (wybrana została liczba większą co do wartości, ponieważ funkcja kryterium podlegała maksymalizacji). Okazuje się więc, że aby uzyskać maksymalny zysk przy minimalnych kosztach własnych, należy produkować 266,66 szaf i 100 stołów. Rozwiązanie to jest oczywiście mało praktyczne, ponieważ zakład nie będzie w stanie wyprodukować 0,66 szafy. Dlatego otrzymany wynik należy zaokrąglić do najbliższej liczby całkowitej, tak, aby spełnione były wszystkie ograniczenia i wartość funkcji była maksymalna. Optymalna struktura produkcji wynosi zatem: $x_{1_opt} = 266$, $x_{2_opt} = 100$

i daje dokładnie 0,633267 złotych na jedną złotówkę poniesionych kosztów. Oczywiście otrzymany wynik zaokrąglony zostaje do wartości 0,63. Należy podkreślić, że uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem kompromisowym, które jednocześnie maksymalizuje przychody i minimalizuje koszty.

Przykład 2.

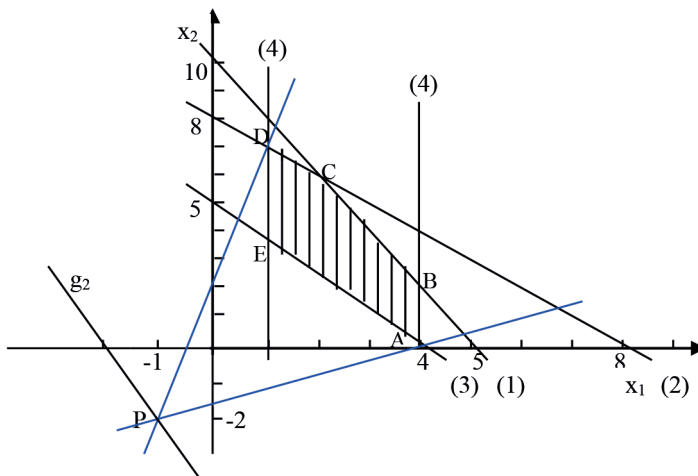
Rozwiązać następujące zadanie Programowania ilorazowego:

- (1) $2x_1 + x_2 \leq 10$
- (2) $3x_1 + 3x_2 \leq 24$
- (3) $5x_1 + 4x_2 \leq 20$
- (4) $1 \leq x_1 \leq 4$
- (5) $x_2 \geq 0$

$$G(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 3x_2 - 5}{2x_1 + x_2 + 5} \rightarrow \min$$

Rozwiązanie:

Zadanie zostanie rozwiązane metodą graficzną. W pierwszej kolejności wykreślono zbiór rozwiązań dopuszczalnych, co prezentuje rys. 18.



Rys. 18. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla zadania z przykładu 2

Należy teraz sprawdzić, czy prosta $2x_1 + x_2 + 4 = 0$ ma punkty wspólne z pięciokątem $ABCDE$. Jak widać na rys. 18 prosta ta przechodzi przez drugą, trzecią i czwartą ćwiartkę układu współrzędnych, podczas gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych znajduje się w ćwiartce pierwszej. Zadanie jest więc sformułowane poprawnie.

Kolejnym krokiem, podobnie jak we wcześniejszym przykładzie, jest wyznaczenie punktu $P(x_1, x_2)$, wokół którego obracać będziemy prostą z mianownika ilorazowej funkcji celu. Aby tego dokonać rozwiązany zostanie układ równań złożony z funkcji występujących w mianowniku i liczniku funkcji celu $G(x_1, x_2)$ mianowicie:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest: $x_1 = -1, x_2 = -2$. Wokół tego punktu obraca się wspomnianą wcześniej prostą i uzyskuje się proste przechodzące przez punkty skrajne zbioru rozwiązań dopuszczalnych tj. punkty A i D . Współrzędne tych punktów można otrzymać rozwiązując układy równań zawierające odpowiednie ograniczenia (dla punktu A (3) i (4), dla punktu D (2) i (4)) lub odczytać z rys. 18. Otrzymano zatem: $A(4,0), D(1,7)$. Wartości funkcji celu w tych punktach wynoszą: $G(A) = -0,083, G(D) = -1,92$.

Ponieważ problem dotyczy minimalizacji, a $G(D) < G(A)$, to optymalnym rozwiązaniem postawionego zadania Programowania ilorazowego jest punkt D , czyli $x_{1\text{opt}} = 1, x_{2\text{opt}} = 7$. Należy tutaj zwrócić uwagę, że gdyby przy ograniczeniach (1) – (5), jako funkcję celu przyjąć $g_1(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 - 5$ i znaleźć jej minimum, to rozwiązaniem będzie punkt $A(4,0)$. Z kolei szukając maksimum funkcji $g_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 4$ przy ograniczeniach (1) – (5) rozwiązaniem będzie nieskończenie wiele rozwiązań, które leżą na odcinku wyznaczonym przez prostą $2x_1 + x_2 - 10 = 0$ (ograniczenie (1)), pomiędzy punktami $C(2,6)$ i $B(4,2)$.

Powyższe obserwacje potwierdzają postawione na początku rozdziału stwierdzenie, że punkt optymalny będący rozwiązaniem zadania PI, czyli tak zwane rozwiązanie kompromisowe, nie musi pokrywać się z rozwiązaniem zadania optymalizacji jednokryterialnej, tj. minimalizacją lub maksymalizacją funkcji g_1 lub g_2 .

6.4. PYTANIA I ĆWICZENIA

1. Ile kryteriów optymalności występuje w zadaniach PI?
2. Czy między modelem matematycznym zadania PI a modelem zadania PL występują jakieś różnice? Jeśli tak, to jakie?

3. Dana jest funkcja $G(x, y) = \frac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)}$ i należy znaleźć jej maksimum. Niech

D będzie zbiorem rozwiązań dopuszczalnych dla funkcji G . Jeżeli prosta $g_2 \subset D$, to czy zadanie PI ma rozwiązanie?

4. Niech następujący pięciobok $ABCDE$ będzie zbiorem rozwiązań dopuszczalnych pewnego zadania PI: $A(1, 4)$, $B(4, 3)$, $C(2, -2)$, $D(-1, -3)$, $E(-2, 1)$. Jeśli punkt będący wierzchołkiem stożka ma współrzędne $P(6, -3)$ to w których punktach można się spodziewać ewentualnych rozwiązań optymalnych? Jak będzie dla punktu $P(5, -1)$?

5. Sformułować jako zagadnienie Programowania ilorazowego następujące zadanie i rozwiązać je metodą graficzną:

Mały zakład dziewiarski specjalizuje się w produkcji rękawiczek i skarpetek. Do ich wyrobu zużywa m.in. wełnę, której zasoby są ograniczone i wynoszą 12 jednostek na dzień produkcji. Aby wyprodukować parę rękawiczek potrzeba 1 jedn. wełny, natomiast do produkcji pary skarpet zużywa się 2 jedn. wełny. Zakład zatrudnia 20 osób. Wiadomo, że do produkcji rękawiczek potrzebne są 2 osoby, do produkcji skarpet również 2. Przeprowadzone badania marketingowe rynku informują, że liczba produkowanych skarpet ma być mniejsza lub równa od potrojonej liczby produkowanych rękawiczek. Do tej pory zakład ma zamówienie na produkcję jednej pary skarpet i jednej pary rękawiczek dziennie. Cena pary rękawiczek to 15 zł, skarpet – 10 zł. Jednostkowy koszt produkcji wynosi 5 zł dla rękawiczek i 7 zł dla skarpet. Podać optymalną strukturę produkcji zakładu w ciągu dnia, kierując się kryteriami maksymalnego zysku całkowitego i minimalnych kosztów jednostkowych produkcji.

6. Następujące zadanie sformułować jako zagadnienie Programowania ilorazowego i rozwiązać je metodą graficzną:

Zakład produkuje dwa rodzaje soków: jabłkowy i porzeczkowy, które sprzedaje w dwulitrowych kartonach. Zawartość niezbędnych składników w obu sokach zawiera tabelka poniżej:

składniki	sok jabłkowy	sok porzeczkowy	normy żywieniowe (w 2 l.)
witaminy	1	3	co najmniej 6000 jedn.
aromat naturalny	1	1	co najmniej 4000 jedn.
cukier	1	1	co najwyżej 5000 jedn.
koncentrat zagęszczonego soku	3	1	co najmniej 6000 jedn.

Koszty jednostkowe produkcji soków wynoszą: 4 zł dla soku jabłkowego i 7 zł dla soku porzeczkowego. Zysk jednostkowy realizowany na produkowanych sokach to odpowiednio 1 zł i 2 zł. Ile litrów soku porzeczkowego i soku jabłkowego powinno produkować przedsiębiorstwo? Szukając rozwiązania kompromisowego należy uwzględnić zarówno postulat minimalizacji kosztów jak i maksymalizacji łącznego zysku.

7. Sformułować jako zagadnienie Programowania ilorazowego następujące zadanie i rozwiązać je metodą graficzną:

Racjonalna hodowla kur wymaga dostarczenia miesięcznie każdej sztuce m.in. trzech składników odżywczych: węglowodanów, wapnia i witamin, które są zawarte w dwóch rodzajach pasz P_1 i P_2 . Niezbędne wartości składników odżywczych, a także ich zawartość w paszach podano w tabeli poniżej:

składniki odżywcze	zawartość składników odżywczych w 1 kg paszy (w jedn.)		norma odżywcza (min. ilość składnika podana w jedn.)
	P_1	P_2	
węglowodany	1,5	3	12 000
wapno	3	2	18 000
witaminy	4	1	12 000

Obie pasze zawierają również białko, którego nie wolno podawać kurom w ilości większej niż 10 000 jednostek miesięcznie. Pasy zawierają po 1 jednostce białka. Wiadomo, że 1 kg paszy P_1 kosztuje 150 zł, a 1 kg paszy P_2 - 120 zł. Z kolei każdy kilogram paszy P_1 daje produkcję jaj o wartości 50 zł, a paszy P_2 - 20 zł. Ile należy zakupić kilogramów pasz w ciągu miesiąca, aby dostarczyć niezbędnych składników odżywczych dla drobiu, przy założeniu minimalizacji kosztów i równocześnie maksymalizacji produkcji jaj?

8. Sformułować jako zagadnienie Programowania ilorazowego następujące zadanie i rozwiązać je metodą graficzną:

Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: W_1 i W_2 przeznaczone na eksport. Do ich produkcji zużywa materiały, surowce i maszyny. Limity poszczególnych czynników produkcji oraz ich jednostkowe zużycie przy wytwarzaniu wyrobów zamieszczono w tabeli:

	W_1	W_2	limity czynników produkcji
materiały i surowce	6	2	240
maszyny	4	4	320

Należy uwzględnić warunek, że wyrobu W_1 powinno się produkować nie więcej niż wyrobu W_2 . Do tej pory przedsiębiorstwo ma zamówienie na 10 sztuk wyrobu W_1 i 20 sztuk wyrobu W_2 . Wiadomo również, że koszty jednostkowe wyrobów W_1 i W_2 wynoszą odpowiednio: 40 zł i 10 zł. Natomiast ceny eksportowe wyrobów wyrażone w euro to 30 dla wyrobu W_1 i 5 dla wyrobu W_2 . Wyznaczyć taki asortymentowy plan produkcji wyrobów W_1 i W_2 , który przy możliwie najniższych kosztach własnych przedsiębiorstwa pozwoli uzyskać maksymalny wpływ dewizowy ze sprzedaży. Ile euro przypada na 1 złotówkę poniesionych nakładów?

9. Rozwiązać podane niżej zadania PI.

a) (1) $2x + 3y \geq 30$

(2) $3x + 2y \leq 40$

(3) $2x + y \geq 20$

(4) $4x + 5y \leq 80$

$$G(x, y) = \frac{x = 2y - 3}{2x + 3y - 2} \rightarrow \max$$

b) przy ograniczeniach (1) – (4) rozwiązać zadanie PI dla funkcji celu:

$$G(x, y) = \frac{2x + 3y - 3}{x + 2y - 3} \rightarrow \min$$

c) przy ograniczeniach (1) – (4) rozwiązać zadanie PL dla funkcji celu:

$$g_1(x, y) = x + 3y \rightarrow \max$$

d) przy ograniczeniach (1) – (4) rozwiązać zadanie PL dla funkcji celu:

$$g_2(x, y) = 2x + 3y \rightarrow \min.$$

10. Rozwiązać następujące zadanie PI:

(1) $3x + 2y \leq 12$

(2) $2x + 4y \leq 12$

$$(3) \quad x + y \geq 3$$

$$(4) \quad x \geq 1$$

$$(5) \quad y \geq 1$$

$$G(x, y) = \frac{-2x + 5y + 1}{x - 3y - 1} \rightarrow \max.$$

11. Rozwiązać podane niżej zadania PL.

$$(1) \quad 3x + y \geq 6$$

$$(2) \quad x + y \geq 4$$

$$(3) \quad x + 3y \geq 6$$

$$(4) \quad x + y \geq 8$$

$$(5) \quad 1 \leq x \leq 7$$

jeśli funkcja celu ma postać:

$$\text{a) } G(x, y) = \frac{4x + 2y + 2}{3x + 2y - 4} \rightarrow \min$$

$$\text{b) } G(x, y) = \frac{2x + 4y + 2}{2x + 3y + 2} \rightarrow \max$$

$$\text{c) } G(x, y) = \frac{2x + 4y - 15}{x + y - 10} \rightarrow \max.$$

Odpowiedzi:

4. Dla punktu $P(6, -3)$ rozwiązanie będą w punktach B lub D,
Dla punktu $P(5, -1)$ rozwiązania będą w punktach B lub C.
5. $x^* = 9; y^* = 1, G_{\max}(x^*, y^*) = 2,79 \text{ zł}$
6. $x^* = 500, y^* = 4500, G_{\max}(x^*, y^*) = 0,28 \text{ zł}$
7. $x^* = 1000, y^* = 0, G_{\max}(x^*, y^*) = 0,33 \text{ zł}$
8. $x^* = 60, y^* = 20, G_{\max}(x^*, y^*) = 0,73 \text{ zł}$, czyli na jedną złotówkę poniesionych nakładów przypada 0,73 euro.

9.

$$\text{a) } x^* = \frac{10}{3}; y^* = \frac{40}{3}, G_{\max}(x^*, y^*) = 0,604$$

$$\text{b) } x^* = \frac{10}{3}; y^* = \frac{40}{3}, G_{\max}(x^*, y^*) = 1,654$$

$$\text{c) } x^* = \frac{10}{3}; y^* = \frac{40}{3}, g_{1\max}(x^*, y^*) = 27$$

$$\text{d) } x^* = 7,5; y^* = 5, g_{2\min}(x^*, y^*) = 28.$$

$$10. x^* = \frac{10}{3}; y^* = 1, G_{\max}(x^*, y^*) = 1.$$

11.

$$\text{a) } x^* = 1; y^* = 3, G_{\max}(x^*, y^*) = 0,923$$

$$\text{b) } x^* = 1; y^* = 7, G_{\max}(x^*, y^*) = 1,185$$

$$\text{c) } x^* = 1; y^* = 7, G_{\max}(x^*, y^*) = 3.$$

7. PROGRAMOWANIE SIECIOWE

7.1. PODSTAWOWE POJĘCIA TEORII GRAFÓW

Grafem nazywana jest para (P, U) gdzie P oznacza zbiór elementów zwanych węzłami, zaś U jest pewną relacją w tym zbiorze. Dla grafów, które będą opisane w niniejszym rozdziale P oznaczać będzie skończony zbiór punktów:

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\},$$

zaś U zbiór połączeń między tymi punktami:

$U = \{u_{ij}\} = \{(i, j)\}$ $i, j = 1, \dots, n$, gdzie istnienie pary (i, j) oznacza istnienie łuku łączącego punkt P_i z punktem P_j .

Łukiem (i, j) nazywane jest połączenie P_i z P_j z uwzględnieniem orientacji (od P_i do P_j).

Drogą nazywany jest taki ciąg łuków, w którym koniec poprzedniego jest początkiem następnego.

Cykl jest drogą zamkniętą tzn. taką, w której węzeł początkowy pokrywa się z końcowym.

Pętlą jest łuk, którego początek i koniec się pokrywają.

Szlakiem nazywane jest połączenie dwóch węzłów bez uwzględnienia orientacji.

Łańcuch jest to ciąg szlaków, w którym początek następnego szlaku jest jednocześnie końcem poprzedniego.

Graf nazywany jest **zorientowanym**, jeśli połączenia między węzłami są łukami, **niezorientowanym**, jeśli połączenia są szlakami.

Jeżeli łuk (i, j) ma początek w węźle P_i to oznacza, że jest on **incydentny zewnętrznie** (dodatnio) z węzłem P_i i **incydentny wewnętrznie** (ujemnie) z węzłem P_j . We wszystkich grafach, jakie będą rozważane, łuki spotkać się mogą tylko w węzłach.

Macierze grafów

Strukturę grafu można przedstawić przy pomocy pewnych macierzy związanych z tym grafem. Rozróżnia się tzw. **macierz połączeń** i **macierz incydencji**. Jeżeli graf zawiera n węzłów, to macierz połączeń jest macierzą kwadratową $n \times n$ i zawiera elementy

$$\text{przy czym: } a_{ji} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

1 pojawia się gdy występuje łuk (i, j) , zaś

0 gdy łuk (i, j) nie występuje.

Dla grafu, zawierającego n węzłów i m łuków, macierz incydencji „węzły-łuki” jest macierzą o wymiarze $n \times m$. Elementy tej macierzy zdefiniowane są następująco:

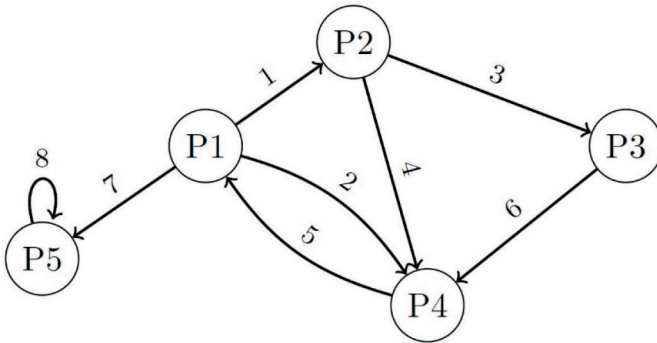
$$\text{przy czym: } a_{ji} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases},$$

1 występuje, gdy łuk u_j jest *incydentny zewnętrznie* z P_i ,

-1 gdy łuk u_j jest *incydentny wewnętrznie* z P_i , zaś

0 gdy łuk u_j nie jest incydentny z P_i .

Przykład 1



Rys. 19. Przykład grafu

Na rysunku powyższej przedstawiono graf składający się z 5 węzłów i 8 łuków.

W grafie tym:

- $(1,2) (2,3) (3,4)$ jest drogą,
- $(5,5)$ jest pętlą,
- $(1,2) (2,4) (4,1)$ jest cyklem,
- $(1,5)$ jest incydentna zewnętrznie z P_1 i wewnętrznie z P_5 .

Macierz połączeń tego grafu ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zaś macierz incydencji węzły–łuki (po wyeliminowaniu pętli):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

W dalszej części rozdziału uwaga zostanie skupiona na grafach zorientowanych bez cykli i pętli. Grafy takie nazywane będą *sieciami*. Jest rzeczą oczywistą, iż wiele różnych realnie istniejących układów może mieć odwzorowanie w postaci grafów. Dla przykładu mogą to być:

- sieci transportowe,
- sieci przemysłowe,
- sieci następstw czynności,
- sieci powiązań elementów.*

7.2. TYPOWE ZAGADNIENIA ROZWIĄZYWANE PRZY POMOCY GRAFÓW

Jak wcześniej zostało wspomniane, grafy (sieci) mogą stanowić dogodny sposób opisu wielu różnorodnych zagadnień. Dzięki swej prostocie i poglądowości stanowią one także podstawę dla klasy metod obliczeniowych związanych z optymalizacją. Przy tego typu podejściu sieć stanowi model matematyczny układu – struktura sieci odzwierciedla strukturę układu. W zależności od rodzaju rozwiązywanego zagadnienia oraz od charakteru badanego układu, węzłom i łukom sieci przyporządkowane są wówczas pewne stałe, którymi najczęściej są:

* Ogólnie można powiedzieć, że grafy nadają się do analizy takich problemów, w których istotne są relacje powiązań przestrzennych lub czasowych

dla łuków:

- przepustowość f_{ij} ,
- wartość łuku k_{ij} ,

dla węzłów:

- stała węzła π_i (stała węzłowa).

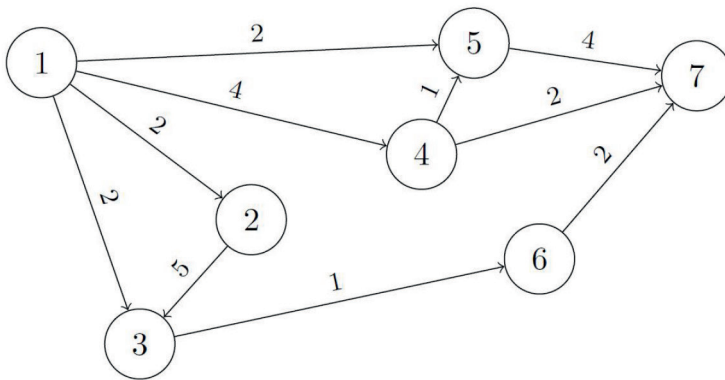
Przepustowość łuku może być równa maksymalnemu przepływowi wzdłuż tego łuku (np.: maksymalne natężenie prądu, maksymalne natężenie ruchu pojazdów).

Wartość łuku stanowią najczęściej: koszt jednostkowego przepływu, czas potrzebny na przybycie łuku, długość łuku itp.

Stała strukturalna węzła może być np. zapotrzebowaniem na wielkość przepływającą łukiem.

Zagadnienie optymalnej drogi

Niech sieć z rysunku 20 będzie graficznym obrazem powiązań czynności w procesie realizacji pewnego przedsięwzięcia.



Rys. 20. Graf jako sieć czynności

Łuki reprezentują wykonywane czynności, zaś węzły etapy ich rozpoczęcia i zakończenia. Wartości łuków zaznaczone na rysunku równe są czasom wykonywania odpowiednich czynności. Należy odpowiedzieć na pytanie: jaki jest najkrótszy możliwy czas realizacji przedsięwzięcia, jeśli węzeł 1 oznacza rozpoczęcie, a węzeł 7 zakończenie jego realizacji. Sieć powyższą powinno się odczytywać tak, iż np. czynność (2,3) musi być poprzedzona przez czynność (1,2), czynność (6,7) musi być poprzedzona przez czynność (3,6) itp. Niektóre zaś czynności mogą być wykonywane równocześnie, a więc np. bezpośrednio

z rysunku nie da się określić relacji czasowej czynności (3,6) i (4,5). Oczywiście jest, że czas realizacji nie może być krótszy niż największa suma czasów czynności stanowiącej na rysunku 20 drogę z 1 do 7. Rozwiązanie zadania polegać będzie zatem na znalezieniu najkrótszej drogi pomiędzy węzłem 1 i węzłem 7 (droga ta nazywa się **drogą krytyczną**).

Należy podkreślić, że ta sama sieć może być np. mapą drogową z zaznaczonymi odległościami pomiędzy poszczególnymi miastami. Może nas wtedy interesować nie najdłuższa, a najkrótsza droga pomiędzy miastami 1,7. Znajdowanie najdłuższej bądź najkrótszej drogi pomiędzy wybranymi węzłami dla takiej sieci jak na rysunku 20 jest sprawą prostą i może się sprowadzić do wypisania długości wszystkich możliwych dróg łączących węzły 1 i 7. Dla sieci bardziej skomplikowanych taka metoda jest najczęściej zbyt uciążliwa. Istnieje algorytm umożliwiający znalezienie optymalnej drogi dla dowolnej sieci, zwany **algorytmem Forda**, a polegający na **cechowaniu węzłów**. Oto jego opis.

Każdemu węzłowi przypisuje się cechę składającą się z pary liczb (c_i, j) postępując następująco:

1. Węzłowi początkowemu przypisuje się cechę $(0,0)$.
2. Cechowane są węzły i , których jedynym poprzednikiem jest węzeł początkowy nadając im cechy (k_i, j_i) .

Zbiór węzłów o cechowanych oznaczony jest przez **P**.

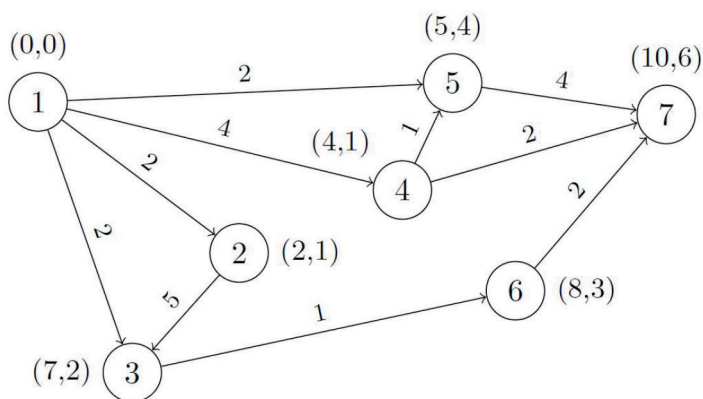
3. Cechowane są węzły, których jedynymi poprzednikami są węzły o cechowane, nadając im cechy:

$$(c_i, j_i), \text{ gdzie } c_i = \min_{j \in P} (k_{ji} + c_j) = k_{j_o i} + c_{j_o}$$

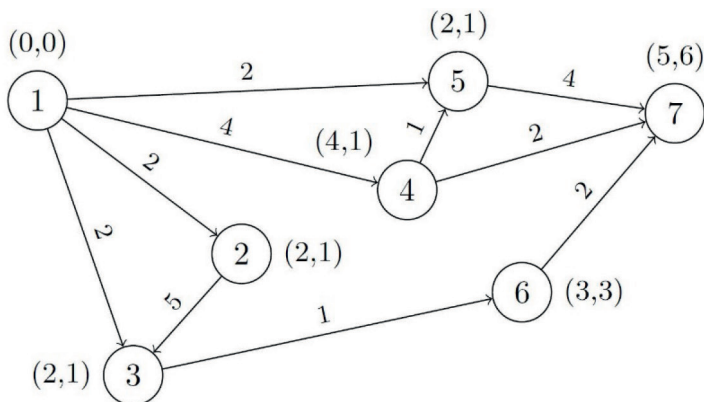
(jeżeli szukana jest droga najdłuższa, to minimum zostaje zamienione na maksimum).

4. Nowy zbiór węzłów o cechowanych oznaczony zostaje jako **P**.
5. Jeżeli węzeł końcowy jest już o cechowany, to odszukanie drogi optymalnej polega na posuwaniu się według drugich wskaźników cech wstecz, jeśli nie, to wraca się do czynności 3.

Rysunki 21 i 22 ilustrują opisaną postępowanie dla przypadku poszukiwania odpowiednio najdłuższej i najkrótszej drogi między węzłami 1 i 7 w sieci z rysunku 20.



Rys. 21. Znajdowanie najdłuższej drogi w grafie (metoda Forda)



Rys. 22. Znajdowanie najkrótszej drogi w grafie (metoda Forda)

Optymalne drogi znalezione zostały za pomocą drugich wskaźników cech cofając się od węzła 7:

- 6, 3, 2, 1 dla rys. 21,
- 6, 3, 1 dla rys. 22.

Zagadnienie maksymalnego przepływu

Niech teraz sieć z rysunku 20 będzie potraktowana jako sieć wodociągowa, przy założeniu, że węzeł 1 jest węzłem źródłowym zaś węzeł 7 – węzłem odbioru wody. Wszystkie pozostałe węzły będą traktowane jako węzły tranzytowe, czyli zwykłe połączenia rur reprezentowanych przez łuki sieci. Liczby wypisane przy poszczególnych łukach niech oznaczają teraz maksy-

malną przepustowość łuku (wyrażoną w l/sek) zaś przepływem przez każdy łuk niech można dowolnie sterować. Formalny opis tak potraktowanej sieci oznaczać będzie przypisanie węzłom 1 i 7 stałych węzłowych równych odpowiednio f i $-f$ (gdzie f oznacza przepływ przez całą sieć), dla pozostałych zaś węzłów stałe strukturalne zostaną przyrównanie do zera.

Powstaje pytanie:

Jaki może być maksymalny przepływ przez taką sieć?

Oczywiście, zamiast zainstalowania jednej rury, projektować tak skomplikowaną sieć dla przepływu wody z punktu pierwszego do punktu siódmego wydaje się być nedorzeczne, ale nawet dla instalacji wodnej istnieje często konieczność budowania takich właśnie sieci (np. sieci grzewcze). Po drugie, taki schemat może być modelem dowolnego przepływu (na przykład przepływu pojazdów przez sieć dróg). Po trzecie, można opisaną sieć w prosty sposób uogólnić przez zmianę węzłów pośrednich z tranzytowych na węzły źródłowe i węzły obioru przy pomocy przypisania im odpowiednich stałych węzłowych (wtedy jednak zadanie, jakie powstanie bardzo by się skomplikowało). Po czwarte, opisana sieć posłuży tylko jako prosty przykład rozwiązywania bardzo ważnego **problemu maksymalnego przepływu**, który jest jednym z typowych zagadnień optymalizacji i dla którego programowanie sieciowe stanowi najlepsze podejście.

Należy zauważyć na wstępie, iż postawione zadanie sformułować można jako zadanie programowania liniowego: jeśli szukane przepływy przez poszczególne łuki oznaczone są jako x_{ij} , zaś maksymalne przepustowości jako f_{ij} , to problem polega na znalezieniu takich x_{ij} , f , że

$$f \Rightarrow \max,$$

przy warunkach

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = f$$

$$-x_{12} + x_{23} = 0$$

$$-x_{13} - x_{23} + x_{36} = 0$$

$$-x_{14} + x_{45} + x_{47} = 0$$

$$-x_{15} - x_{45} + x_{57} = 0$$

$$-x_{36} + x_{67} = 0$$

$$-x_{47} - x_{57} - x_{67} = -f$$

$$0 \leq x_{12} \leq f_{12} = 2$$

$$0 \leq x_{13} \leq f_{13} = 2$$

$$0 \leq x_{14} \leq f_{14} = 4$$

$$0 \leq x_{15} \leq f_{15} = 2$$

$$0 \leq x_{23} \leq f_{23} = 5$$

$$0 \leq x_{36} \leq f_{36} = 1$$

$$0 \leq x_{45} \leq f_{45} = 1$$

$$0 \leq x_{47} \leq f_{47} = 2$$

$$0 \leq x_{57} \leq f_{57} = 4$$

$$0 \leq x_{67} \leq f_{67} = 2.$$

W postaci macierzowej zapis jest następujący:

$$f(\vec{x}) = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \Rightarrow \max$$

$$A\vec{x} = 0$$

$$0 \leq \vec{x} \leq \vec{b}$$

gdzie:

$$\vec{x} = [x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{36}, x_{45}, x_{47}, x_{57}, x_{67}, f],$$

$$\vec{c} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],$$

$$\vec{b} = [f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{23}, f_{36}, f_{45}, f_{47}, f_{57}, f_{67}, f_{12} + f_{13} + f_{14} + f_{15}],$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

W macierzy opisującej ograniczenia typu równości można rozpoznać macierz incydencji węzły-łuki dla omawianej sieci. Wiersze tej macierzy są liniowo zależne, bo np. ostatnie równanie otrzymać można jako ujemną sumę pozostałych (w związku z czym można to równanie pominąć). Rozwiązanie tak postawionego zadania metodą simpleks byłoby uciążliwe mimo prostoty macierzy ograniczeń, albowiem zapisany w postaci kanonicznej problem zawiera 22 zmiennych przy 18 ograniczeniach.

Opisany niżej **algorytm cechowania węzłów Forda-Fulkersona** pozwala na znalezienie rozwiązania w sposób znacznie prostszy. Polega on na wyszukiwaniu dróg łączących węzeł początkowy z końcowym i nasycenie przepływu wzdłuż tych dróg. Droga nazywana jest **nienasyconą**, jeśli przepływ przez wszystkie łuki tej drogi jest mniejszy niż wynosi przepustowość odpowiednich łuków. Droga jest **nasyconą**, jeśli choć w jednym z łuków, które ją tworzą, przepływ równy jest przepustowości. Jeśli wszystkie możliwe drogi są nasycone, wówczas przepływ przez sieć jest maksymalny. Z powyższego wynika jasno sposób poszukiwania optymalnego rozwiązania. Problem tkwi jedynie w usystematyzowaniu poszukiwania kolejnych dróg nienasyconych. Istota algorytmu Forda-Fulkersona polega na podaniu przepisu iteracyjnego wprowadzającego porządek w odszukiwaniu dróg nienasyconych i pozwalającego stwierdzić, kiedy dróg takich nie ma. Kolejną drogę nienasyconą znajduje się cechując węzły wzdłuż tej drogi od węzła początkowego do końcowego. Cechowanie to różni się jednakże od opisanego poprzednio. Węzeł P_i może być ocechowany z węzła P_j i otrzymuje cechę $(c_j, j^{\#})$, w której j oznacza numer węzła, z którego dany węzeł został ocechowany, zaś „+” jest zapisany, jeśli do węzła cechowanego z węzła cechującego można się dostać zgodnie z orientacją łuku, a „-”, jeżeli przeciwnie. Cecha c_i oznacza wielkość przepływu przez węzeł cechowany w danej iteracji. Reguły cechowania są następujące:

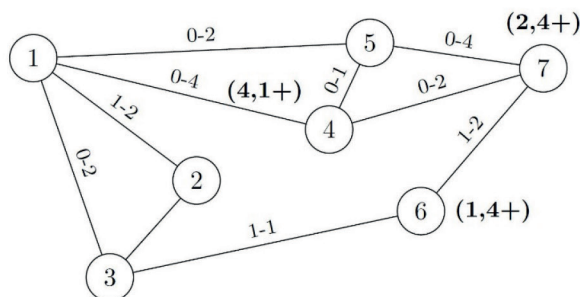
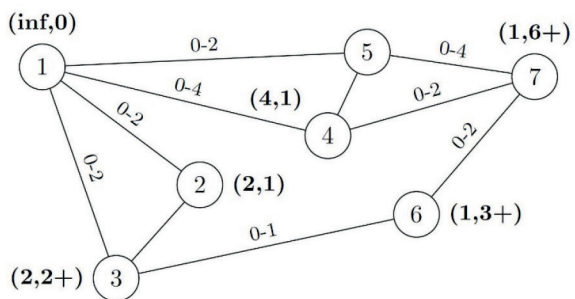
1. Ustala się dowolny przepływ przez sieć np. $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U$. Cechuje się węzeł źródłowy nadając mu cechę $(\infty, 0)$.
2. Cechuje się dowolny węzeł i połączony z węzłem początkowym łukiem nienasyconym, nadając mu cechę:
 $(c_i, 1^+)$, gdzie $c_i = \min(c_p, f_{ji} - x_{ip})$.
 Zbadane zostają wszystkie węzły połączone z węzłem ocechowanym.

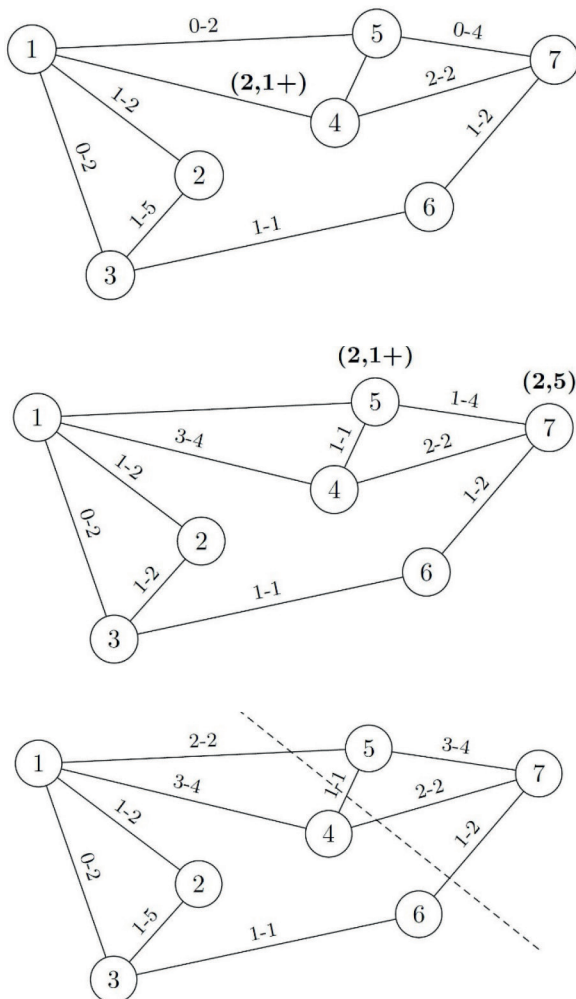
Cechowane są te z nich, które z węzłem i połączone są łukami nienasyconymi incyidentnymi zewnętrznymi z i , lub łukami o przepływie niezerowym incyidentnymi wewnętrznymi z i . Nadawane są im cechy (węzłów nie spełniających tych warunków nie można ocechować): $(c_i, i^\pm)$, gdzie:

dla dodatniej incydencji przyjmuje się $c_i = \min(c_i, f_{ij} - x_{ij})$ oraz „+”, zaś dla ujemnej incydencji $c_i = \min(c_i, x_{ij})$ oraz „-”.

- Postępuje się tak z wszystkimi kolejnymi węzłami, dopóki wśród węzłów ocechowanych nie znajdzie się węzeł końcowy. Jeśli węzła końcowego nie można ocechować oznacza to, że przepływ jest maksymalny.
- Posuwając się wstecz zgodnie z drugim wskaźnikiem cech zmienione zostają przepływy o wartość $\pm c_n$ (c_n – cecha węzła końcowego), w zależności od znaku incydencji.
- Powtarza się czynność 2.

Jak widać, proces nasycenia kończy się gdy nie można już wykonać czynności 2, tzn. gdy wszystkie łuki wychodzące ze źródła są nasycone lub gdy zachodzi przypadek opisany w punkcie 3. A oto jak wygląda zastosowanie algorytmu Forda–Fulkersona dla znalezienia maksymalnego przepływu w sieci z rysunku 21. Przepływ początkowy przez sieć wynosi $x_{ij}=0$ (oznaczenie wzdłuż łuków: x_{ij}, f_{ij}).





Rys. 23. Znajdowanie maksymalnego przepływu w sieci metodą Forda-Fulkersona

Ostatnia sieć na tym rysunku pokazuje przepływ maksymalny – wszystkie możliwe drogi prowadzące z 1 do 7 są nasycone. Rozwiązanie przy pomocy pakietu Excel pokazane jest na następnych dwóch rysunkach. Tym razem zastosowano inny układ danych, ponieważ zadanie daje się prościej (przy pomocy mniejszej liczby formuł) zapisać w tej postaci.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		x12	x13	x14	x15	x23	x36	x45	x47	x57	x67	f	
2	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
4	f=cx	0											
5	1	0	=	0									
6	2	0	=	0									
7	3	0	=	0									
8	4	0	=	0									
9	5	0	=	0									
10	6	0	=	0									
11	7	0	=	0									
12	8	0	<=	2									
13	9	0	<=	2									
14	10	0	<=	4									
15	11	0	<=	2									
16	12	0	<=	5									
17	13	0	<=	1									
18	14	0	<=	1									
19	15	0	<=	2									
20	16	0	<=	4									
21	17	0	<=	2									

Parametry dodatku Solver

Ustaw cel:

Na: ☒ Maks ☐ Min ☐ Wartość:

Przez zmienianie komórek zmiennych:

Podlegających ograniczeniom:

☒ Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń

Wybierz metodę rozwiązywania:

Metoda rozwiązywania
W przypadku gładkich nieliniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat nieliniowy GRG.
Dla liniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat LP simpleks, natomiast w przypadku problemów, które nie są gładkie, wybierz aparat ewolucyjny.

Pomoc Rozwiąż Zamknij

Rys. 24. Dane i dialog definicji analizy dla zadania maksymalnego przepływu

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x12	x13	x14	x15	x23	x36	x45	x47	x57	x67	f
2	x	0	1	3	2	0	1	1	2	3	1	6
3	c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	f=cx	6										
5	1	6	=	6								
6	2	0	=	0								
7	3	0	=	0								
8	4	0	=	0								
9	5	0	=	0								
10	6	0	=	0								
11	7	-6	=	-6								
12	8	0	<=	2								
13	9	1	<=	2								
14	10	3	<=	4								
15	11	2	<=	2								
16	12	0	<=	5								
17	13	1	<=	1								
18	14	1	<=	1								
19	15	2	<=	2								
20	16	3	<=	4								
21	17	1	<=	2								

Rys. 25. Wyniki obliczenia maksymalnego przepływu (f=6)

Widać, że przepływ od węzła początkowego został inaczej wybrany niż to zostało zrobione poprzednio. Mianowicie na rysunku 23 dane są: $x_{12} = 1$, $x_{13} = 0$, $x_{23} = 1$, zaś tutaj: $x_{12} = 0$, $x_{25} = 0$ natomiast $x_{13} = 1$.

Z rozważanym problemem oraz algorytmem Forda–Fulkersona pozostaje w pośrednim związku ważne twierdzenie, które zostanie podane bez dowodu, ale najpierw wprowadzone będzie pojęcie **przekroju**.

***Przekrojem sieci** nazywany jest zbiór łuków, których wyłączenie z sieci spowodowałoby niemożność przepływu z węzła źródłowego do węzła odbioru (czyli nastąpiłaby separacja tych węzłów).*

Każdemu przekrojowi przyporządkowana jest pewna miara, równa sumie przepustowości łuków stanowiących przekrój. Każda sieć posiada skończoną liczbę przekrojów. Ten z nich, który posiada najmniejszą przepustowość nazywany jest **przekrojem minimalnym**.

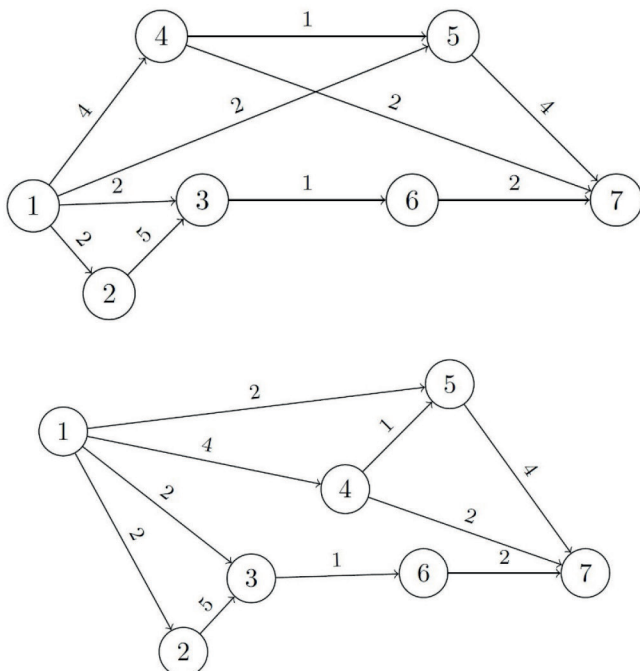
Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju

Dla każdej sieci maksymalna wartość przepływu od węzła źródłowego do węzła odbioru, równa jest przepustowości minimalnego przekroju.

Twierdzenie to jest zrozumiałe intuicyjnie, a podany przykład z siecią wodociągową powinien stanowić silny argument poglądowy. Ścisły dowód twierdzenia jest na tyle skomplikowany, iż jego prezentacja zostanie pominięta. Na rysunku 23 (ostatni graf) pokazano minimalny przekrój sieci. Tworzą ten przekrój wszystkie łuki nasycone. Przepustowość wynosi 6 – tyle ile maksymalny przepływ przez sieć. Na zakończenie podana będzie jedna ważna wskazówka praktyczna, mianowicie:

Przy analizie jakiegokolwiek problemu związanego z siecią należy tę sieć możliwie najstaranniej i najprościej narysować zanim przystąpi się do rozwiązania postawionego zadania.

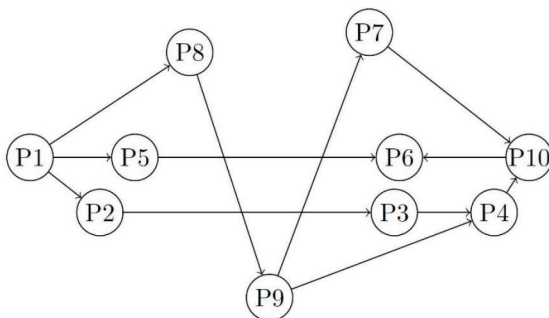
W większości wypadków trud włożony w graficzne opracowanie sieci, zwraca się z nawiązką w trakcie znajdowania rozwiązywania i interpretacji wyników. Jako przykład niech znów posłuży sieć z rysunku 21. Można zauważyć, o ile prościej przedstawia się ona w postaciach zaprezentowanych na rysunku 26.



Rys. 26. Sieć z rysunku 21 inaczej

7.3. PYTANIA I ĆWICZENIA

1. Co to jest sieć?
2. Znaleźć wszystkie drogi z P_1 do P_{10} w następującym grafie:



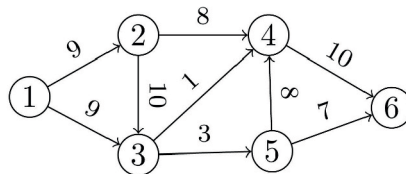
3. Napisać macierz incydencji i macierz połączeń dla grafu z zadania 2.
4. Narysować graf, którego macierz połączeń jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Narysować graf, którego macierzą incydencji węzły-łuki jest:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Znaleźć najkrótszą i najdłuższą drogę między węzłami 1 i 8 w grafie z zadania 5, jeśli długości łuków wynoszą (8, 5, 10, 4, 1, 4, 2, 7, 4, 10, 9, 7, 5).
7. Znaleźć maksymalny przepływ w grafie:



8. Znaleźć najdłuższy i najkrótszy czas przejazdu między węzłami 1 i 8 w grafie, dla którego macierzą czasów jest:

Wskazówka: Jeśli wszystkie niezerowe elementy macierzy czasów zostaną zamienione na 1 to otrzyma się macierz połączeń grafu.

9. Narysować grafy, których macierzami połączeń są:

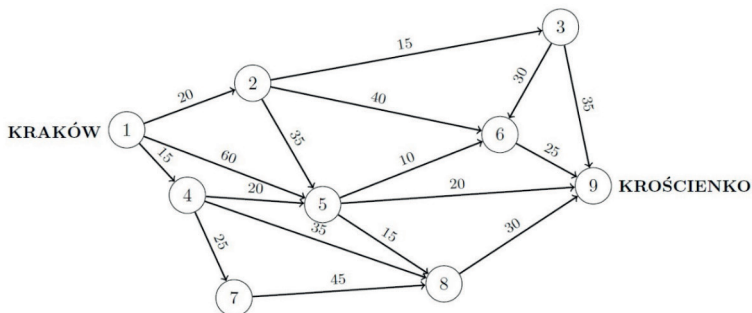
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wypisz macierze incydencji dla grafów.

10. Sformułować zadanie znajdowania optymalnej drogi w sieci jako zadanie programowania liniowego.

11. Układ połączeń między miastami oraz odległości w kilometrach przedstawiono na rysunku poniżej. Jaka jest najkrótsza, a jaka najdłuższa droga z Krakowa do Krościenka nad Dunajcem. Rozwiązać zadanie posługując się algorytmem Forda oraz wykorzystując metody programowania liniowego.



Odpowiedzi:

3.

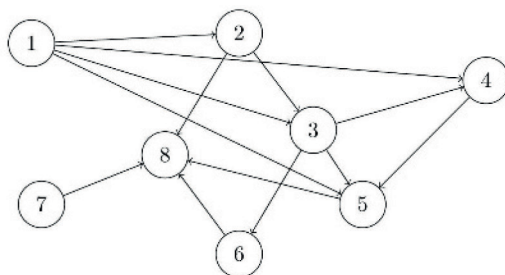
- Macierz połączeń

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

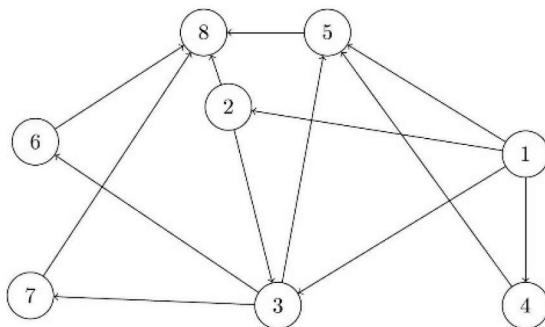
- Macierz incydencji

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.



5.



6.

- droga najkrótsza: długość drogi 12
- droga najdłuższa: długość drogi 29

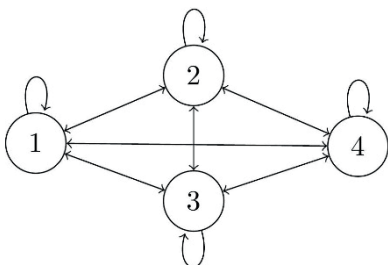
7. Maksymalny przepływ ze źródła 1 do ujścia 6 wynosi 12

8.

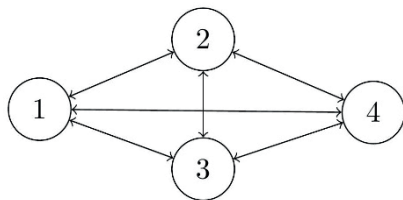
- najkrótszy czas przejazdu: czas 13
- najdłuższy czas przejazdu: czas 29

9.

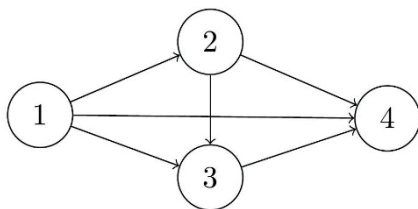
A)



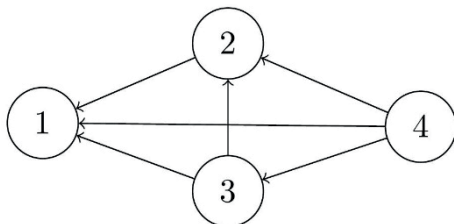
B)



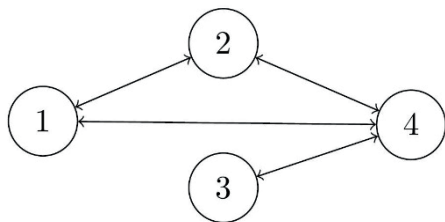
C)



D)



E)

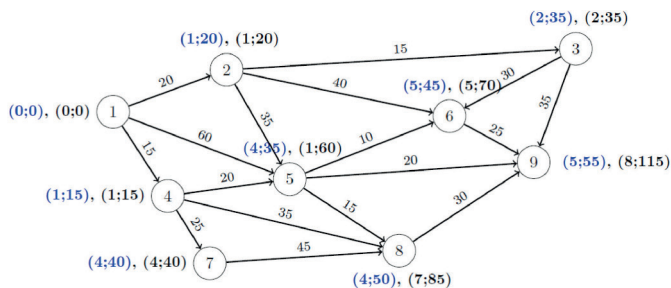


A), B) macierz incydencji po eliminacji węzłów

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \end{bmatrix} \\
 C) & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 D) & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 E) & \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

11.

- droga najkrótsza: 55 km
- droga najdłuższa: 115 km.



8. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Omawianie przykładów i zastosowań poznanych metod optymalizacji, którym poświęcony został niniejszy rozdział, poprzedzony zostanie uwagą ogólną na temat sposobu potraktowania zagadnienia. Czytelnik zechce zastanowić się na co powinien zwrócić uwagę przy lekturze. Otóż wszystkie przykłady przytaczane w dalszym ciągu omówione są bardzo pobieżnie, można powiedzieć, że zostały zaledwie naszkicowane. Każdy z nich sam w sobie stanowi poważne zagadnienie, któremu poświęcono wiele opracowań. Zarówno sposób formułowania modelu, jak metody rozwiązywania, ze względu na specyfikę zagadnień mogą być istotnie różne od tych, jakie zostały zaprezentowane dotychczas. Celem tego rozdziału nie jest dokładne ich przytaczanie. Chodzi raczej o to, aby zwrócić uwagę na to, co dla wszystkich zastosowań jest wspólne, o zróżnicowaniach jedynie wspominając. Przytoczone przykłady powinny zorientować Czytelnika do jakich problemów i w jaki sposób można stosować poznane metody optymalizacji.

8.1. ZAGADNIENIA TRANSPORTOWE

Z m magazynów należy wysłać pewną ilość towaru do n odbiorców. Magazyny i odbiorcy znajdują się każdy w innym mieście. Zapasy w poszczególnych magazynach wynoszą odpowiednio $a_1, \dots, a_m$, natomiast zapotrzebowania odbiorców $b_1, \dots, b_n$. Zapasy równe są zapotrzebowaniu (tzw. zbilansowane zagadnienia transportowe) tzn.:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Znany jest koszt transportu z i -tego magazynu do j -tego odbiorcy c_{ij} ($i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$) dla wszystkich i, j . Należy tak rozdysponować transport, aby całkowity koszt przewozu był minimalny. Jeżeli przez x_{ij} oznaczona zostanie ilość towaru przewożona z magazynu i do odbiorcy j to zadanie można sformułować następująco:
znaleźć takie x_{ij} aby:

$$f(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ji} x_{ji} \Rightarrow \min, \quad (29)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ji} = b_j,$$

$$x_{ji} \geq 0.$$

Jak widać jest to zagadnienie programowania liniowego o $m \times n$ zmiennych i $m + n$ ograniczeniach. Macierz ograniczeń tego zadania jest szczególna, zawiera bowiem tylko zera i jedynki. Pełną informację o zadaniu tego typu zawierają:

- macierz kosztów $\{c_{ij}\}$, która przy pewnym uporządkowaniu stanowi wektor współczynników funkcji celu,
- wektor zapasów $\{a_i\}$,
- wektor zapotrzebowań $\{b_j\}$, które łącznie stanowią wektor wyrazów wolnych.

O zadaniu (29) udowodniono, że:

1. Posiada rozwiązanie dopuszczalne.
2. Jeżeli a_i, b_j są całkowite i nieujemne, to każde rozwiązanie wierzchołkowe jest całkowitoliczbowe.

Ze względu na specyfikę macierzy ograniczeń opracowano specjalnie efektywne algorytmy rozwiązania zadania (29). Szczególny przypadek omawianego zadania dla $m = n$ oraz $a_i = b_j = 1$ ($i = 1, \dots, n$) nosi nazwę **zagadnienia rozdziału** i jest często spotykane w praktyce. Oto dwa przykłady zadań prowadzące do zagadnienia rozdziału.

1. *Zakład pracy posiada n etatów do obsadzenia. Zgłosiło się n kandydatów. Po wypełnieniu ankiet ustalono tablicę bonitacyjną C , której elementy c_{ij} równe są wartości, jaką dla zakładu przedstawia i -ty kandydat na j -tym stanowisku. Należy tak rozmieścić pracowników, aby ich wartość dla zakładu była maksymalna.*

Rozwiązanie:

$$\text{Zakładając, że } x_{ji} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

gdzie:

0 występuje, gdy i -ty pracownik nie jest zatrudniony na j -tym stanowisku,

1 występuje, gdy i -ty pracownik jest zatrudniony na j -tym stanowisku,

to problem polega na znalezieniu takich x_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) by

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \max, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{przy} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = I, \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = I, \\ & x_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

2. W pewnym oddziale zakładu produkcyjnego wykonuje się n czynności, z których każda może być wykonana przez n maszyn, jakimi dysponuje oddział. Koszt wykonania i -tej czynności przez j -tą maszynę wynosi c_{ij} . Jak rozdzielić poszczególne maszyny do wykonania odpowiednich czynności, aby całkowity koszt produkcji był minimalny.

Jeżeli oznaczenie na x_{ij} będzie takie same jak w poprzednim przykładzie, to rozwiązanie będzie polegać na znalezieniu takich x_{ij} ($i, j=1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \text{by} \quad & f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min, \\ \text{przy} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = I, \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = I, \\ & x_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

Jak wynika z przytoczonych opisów omawiane zagadnienia należą do zadań programowania dyskretnego. Wspomniane wcześniej twierdzenie zapewnia spełnienie warunku dyskretności przy stosowaniu dowolnej metody rozwiązywania.

Najczęściej stosowanymi metodami rozwiązywania zadań typu (30) są **metoda Dantziga** i tzw. **metoda węgierska**, oraz pewne warianty programowania sieciowego. Uogólnieniem omawianych przykładów są tzw. **niezbilansowane zagadnienia transportowe**, a więc takie, w których popyt nie równa się podaży:

$$\sum a_i \neq \sum b_j$$

oraz tzw. **zagadnienia wielotowarowe**, w których więcej niż jeden produkt może być przedmiotem transportu.

8.2. ZAGADNIENIE MIESZANKI

Dane jest n składników, które można łączyć ze sobą w różnych proporcjach, otrzymując mieszanki o różnych właściwościach. Każdą mieszankę charakteryzuje się podając m cech. Cechy posiadają własność addytywności. Zawartość k -tej cechy w i -tym składniku mieszanki oznaczona jest przez a_{ik} .

Koszt jednostki i -tego składnika oznaczono przez c_i . Aby spełnić warunek jakości, mieszanka musi zawierać co najmniej b_k jednostek k -tej cechy. Jakiej powinny zostać wzięte ilości wszystkich składników, by otrzymać najtańszą mieszankę, spełniając warunek jakości?

Jeżeli przez x_i oznaczać będzie ilość i -tego składnika w mieszance to postawiony problem sprowadza się do następującego zadania programowania liniowego:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \Rightarrow \min, \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0,$$

które rozwiązuje się standardową metodą simpleks. Z zadaniami tego typu można się spotkać przy projektowaniu diety – wtedy cechami są składniki odżywcze, bądź przy projektowaniu mieszanek przemysłowych i wówczas cechami mogą być jakiegokolwiek własności fizyczne bądź chemiczne posiadające własność addytywności.

8.3. KONTROLA ZAPASÓW I PLANOWANIE PRODUKCJI

Zagadnienie, które zostanie opisane poniżej stanowi typowy problem każdego producenta zmuszonego do liczenia się z okresową zmianą popytu na swój produkt. Problem polega na sporządzeniu planu produkcji mającej w okresie najbliższych sześciu miesięcy zapewnić zaspokojenie popytu, którego prognoza podana jest w tabeli:

1 miesiąc	900 sztuk
2 miesiąc	1100 sztuk
3 miesiąc	1500 sztuk
4 miesiąc	800 sztuk
5 miesiąc	800 sztuk
6 miesiąc	1000 sztuk

Wymagane zapotrzebowanie można pokryć produkując odpowiednie ilości w ciągu każdego miesiąca, bądź produkując tylko część wymaganej ilości, resztę uzupełniając z zapasów. Pierwsza ewentualność spowoduje nierytmiczność produkcji, nie sprawiając jednakże kłopotu z magazynowaniem zapasu, druga zapewnia produkcję rytmiczną, ale wymaga zwiększenia kosztów magazynowania. Przy odpowiednim sformułowaniu problem daje się przedstawić jako zadanie programowania liniowego. W tym celu wprowadzone zostają następujące zmienne:

$v_0, v_i, x_i, y_i, z_i, i = 1, \dots, n$ (n – ilość okresów progностycznych).

gdzie:

v_0 – pierwotny zapas,

v_i – zapas w i -tym miesiącu,

x_i – produkcja w i -tym miesiącu,

y_i – przyrost produkcji w i -tym miesiącu,

z_i – spadek produkcji w i -tym miesiącu.

Jeżeli zapotrzebowanie w i -tym miesiącu zostanie oznaczone przez b_i , koszt jednostkowy magazynowania przez c , zaś koszt jednostkowy przyrostu produkcji przez a , to zadanie można przedstawić jako:

$$f = c \sum_{i=0}^n v_i = a \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow \min,$$

przy warunkach

$$x_i + v_{i-1} - v_i = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i - x_{i-1} = y_i - z_i$$

$$v_i \geq 0, x_i \geq 0, y_i \geq 0, z_i \geq 0.$$

Z równań ograniczających można wyeliminować zmienne x_i , ponieważ nie występują one w funkcji celu.

A zatem:

$$x_i = b_i + v_i - v_{i-1}$$

$$x_{i-1} = b_{i-1} + v_{i-1} - v_{i-2}$$

stąd

$$x_i - x_{i-1} = b_i - b_{i-1} + v_i - v_{i-1} - v_{i-1} + v_{i-2} = b_i - b_{i-1} - 2v_{i-1} + v_i + v_{i-2}.$$

Ostateczną postacią zadania jest więc:

$$f = c \sum_{i=0}^n v_i = a \sum_{i=1}^n y_i \Rightarrow \min, \quad (32)$$

$$b_i - b_{i-1} - 2v_{i-1} + v_i + v_{i-2} = y_i - z_i, \quad i = 2, \dots, n$$

$$v_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad z_i \geq 0.$$

Wracając do przykładu, gdyby z kolei koszt magazynowania wynosił $c = 100$ zł, zaś koszt produkcji $a = 1000$ zł, natomiast zapas pierwotny był na poziomie $v_0 = 200$ szt, wówczas optymalny plan produkcji zapewniający maksymalną rytmiczność i minimalne koszty magazynowania będzie wynikać z rozwiązania następującego zadania programowania liniowego:

Zminimalizować

$$f = 100(200 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6) + 1000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} v_2 - 2v_1 + 200 + 200 &= y_2 - z_2 \\ v_3 - 2v_2 + v_1 + 400 &= y_3 - z_3 \\ v_4 - 2v_3 + v_2 - 700 &= y_4 - z_4 \\ v_5 - 2v_4 + v_3 &= y_5 - z_5 \\ v_6 - 2v_5 + v_4 + 200 &= y_6 - z_6 \\ v_i &\geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad z_i \geq 0. \end{aligned} \tag{32a}$$

8.4. ZAGADNIENIE PRZEPŁYWÓW MIĘDZYGAŁĘZIOWYCH

Analiza wymiany pomiędzy różnymi działami tego samego przedsiębiorstwa była jednym z pierwszych zastosowań programowania liniowego w dziedzinie ekonomii. Jeden z twórców takiego podejścia W. Leontiew wybrał sobie jako przykład przedsiębiorstwa całą gospodarkę Stanów Zjednoczonych. Działami produkcji były dla niego poszczególne gałęzie gospodarki, zaś analizie poddał wymianę (przepływy) produktów między tymi gałęziami. Stąd nazwa – *analiza przepływów międzygałęziowych*, obecnie używa się także na określenie tego typu zagadnień nazwy *optymalne modele bilansowe*. Przedstawiony zostanie tutaj przykład znacznie mniej ambitny, ale posiadający wszystkie cechy ogólności.

Przedsiębiorstwo posiada n działów, z których każdy wytwarza inny produkt. Między działami zachodzi wymiana produktów, w tym sensie, iż produkt jednego działu stanowi półprodukt lub surowiec przy produkcji innych działów. Oprócz wymiany wewnętrznej każdy dział produkuje pewną ilość

towarów na zewnątrz. Przyjęło się stosowanie następującej terminologii na określenie poszczególnych wielkości charakteryzujących opisany proces produkcyjny.

Współczynnik nakładów bezpośrednich a_{ik} – liczby wyrażające ile jednostek produktu działu i przypada na jednostkę produktu działu k (wymiana wewnętrzna).

Produkcja globalna oddziału x_i – całkowita ilość jednostek wytwarzana przez i -ty dział.

Produkcja końcowa oddziału y_i – ilość jednostek produktu i -tego działu przeznaczona „na zewnątrz”.

Dla każdego oddziału rozpatrywanego przedsiębiorstwa spełnione musi być następujące równanie bilansowe:

(produkcja globalna) – (przepływ do innych działów) = produkcja końcowa,

co można zapisać w postaci

$$x_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = y_i \quad i=1, \dots, n, \quad (33)$$

lub w postaci macierzowej

$$(I - A) X = Y, \quad (34)$$

gdzie:

I – macierz jednostkowa, $A = \{a_{ik}\}$.

Macierz $I - A$ znana jest jako **macierz Leontiewa**, zaś $(I - A)^{-1}$ nazywa się **macierzą nakładów całkowitych**. Z (34) wynika, iż wektor produkcji globalnej wyraża się przez produkcję końcową i nakłady bezpośrednie jako:

$$X = (I - A)^{-1} Y. \quad (35)$$

Jeżeli znane są ceny produktu końcowego – c_p to można pokusić się o skonstruowanie optymalnego planu produkcji, a więc takiego, który zapewni maksymalny zysk spełniając jednocześnie równania bilansowe (33) oraz pewne dodatkowe ograniczenia wynikające np. z braku surowców lub ograniczonej mocy wytwórczej. Niech ograniczenia te nie pozwolą przekroczyć produkcji globalnej zadanych z góry wartości b_i (dla i -tego działu produkcji). Wtedy optymalny plan produkcji będzie rozwiązaniem następującego zadania programowania liniowego

$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n c_i y_i = \max$$

przy warunkach

$$x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i \geq 0, \quad x_i \geq 0.$$

Na podstawie równań bilansowych można podać równoważne sformułowanie zawierające tylko zmienne y_i

$$f(\vec{y}) = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \Rightarrow \max$$

$$(I - A)^{-1} \vec{y} \leq \vec{b} \quad (36)$$

$$\vec{y} \leq 0.$$

Rozwiązując (36) można znaleźć optymalny plan produkcji końcowej, po czym korzystając z (35) optymalny plan produkcji globalnej. Widać, iż do jednoznacznego sformułowania zagadnienia optymalnego modelu bilansowego należy znać macierz nakładów bezpośrednich A , wektor cen produktu końcowego $\vec{c}$ oraz wektor ograniczeń produkcji globalnej $\vec{b}$. Niekiedy można spotkać inne dane wejściowe, które nie są bezpośrednio równe A , $\vec{b}$, $\vec{c}$ – wówczas należy bądź zmodyfikować postać zadania, bądź na podstawie danych obliczyć wymagane wielkości A , $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Opisany przypadek należy do klasy tzw. *statycznych modeli ekonomicznych*, nieuwzględniających zmian w czasie. Jeżeli takie zmiany uwzględnić w stosunku do wszystkich wielkości ingerujących w model, podobnie jak to miało miejsce przy planowaniu zapasów to można otrzymać tzw. *model dynamiczny*.

Model dynamiczny uwzględnia nie tylko jeden okres produkcyjny, ale kilka na raz i może służyć jako narzędzie planowania długofalowego. Oczywiście jest, że zarówno liczba zmiennych, jak ilość ograniczeń i komplikacja struktury modelu znacznie w tym przypadku wzrastają.

8.5. ANALIZA DROGI KRYTYCZNEJ – METODA PERT

Metody analizy drogi krytycznej⁹⁾ służą do planowania czasowego przedsięwzięć i są bardzo zbliżone do harmonogramowania. Różnią się one od niego większą kompleksowością ujęcia oraz adaptacyjnym charakterem. Jako

⁹⁾ Zwane także metodami CPM, (Critical Path Method) lub PERT (Program Evaluation and Review Technique).

jedyny problem rozwiązywany w niniejszym opracowaniu explicite metodą programowania sieciowego potraktowany on będzie nieco bardziej szczegółowo niż inne przykłady zastosowań.

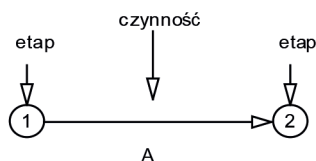
Metody planowania sieciowego, które rozwinęły się w Stanach Zjednoczonych od czasu realizacji programu raket Polaris, stały się obecnie powszechnym narzędziem administrowania. Stosowanie ich zaleca się nawet wówczas, gdy z góry można przewidzieć, że programu analizy nie da się przeprowadzić do końca. Dzieje się tak dlatego, iż już w fazie wstępnej przygotowania sieci czynności należy gruntownie przeanalizować całe przedsięwzięcie, co na ogół pozwala uświadomić kierownictwu cały szereg ważnych jego aspektów, które bez tego mogłyby umknąć uwadze. Dzięki temu już w fazie przygotowawczej można ustalić punkty newralgiczne operacji, najlepsze sposoby agregowania czynności, rozdział środków, itp.

Do czasu powstania metod sieciowych problemy takie rozwiązywano głównie techniką wykresów Gantta [[21], [28]], które stanowią dogodną formę prezentacji, lecz nie są najlepszym narzędziem analizy. W metodzie sieciowej całe przedsięwzięcie znajduje odwzorowanie w postaci sieci zależności, która stanowi model przedsięwzięcia. Ustalenie kryteriów jakości pozwala znaleźć rozwiązanie optymalne techniką programowania sieciowego, zaś wykres Gantta jest najczęściej produktem końcowym przedstawiającym optymalny harmonogram pracy. W sieci czynności węzły przedstawiają etapy robót, zaś łuki poszczególne ich rodzaje.

Opracowanie czynności wymaga:

- strategicznych ustaleń dotyczących całego przedsięwzięcia, a więc jego celu, zakresu itp.,
- określenia wszystkich czynności (prac, zadań, czy też robót etapowych jak to się inaczej nazywa) niezbędnych do wykonania przedsięwzięcia,
- ustalenia czasu wykonywania poszczególnych czynności oraz ich charakterystyk czasowo-kosztowych^{**x},
- ustalenia logicznych powiązań czynności i etapów robót.

Najprostsza sieć zależności składająca się z jednej tylko czynności *A* przedstawiona jest na rysunku 27.



Rys. 27. Najprostsza sieć czynności

^{**x}) Charakterystyki czasowo-kosztowe przedstawiają zależność kosztu wykonania danej czynności od czasu jej wykonania.

Węzeł 1 oznacza rozpoczęcie, zaś węzeł 2 zakończenie czynności A (a tym samym całego przedsięwzięcia). Ustalenie czasu trwania czynności A dokonuje się w metodzie PERT przez określenie czasu optymistycznego, pesymistycznego i oczekiwanego. W przypadku, gdy dana czynność była już wykonywana wcześniej, można na podstawie doświadczenia po prostu podać rozkład czasu jej wykonania w postaci odpowiedniej funkcji gęstości rozkładu. Czasy, i odpowiadają dla danej funkcji dolnej i górnej granicy określoności oraz wartości modalnej. Jeżeli czynność wykonywana jest po raz pierwszy, wtedy oceny, i wyznacza się kierując się zdrowym rozsądkiem i biorąc pod uwagę wszystkie możliwe okoliczności, które mogą przyspieszyć lub opóźnić realizację czynności.

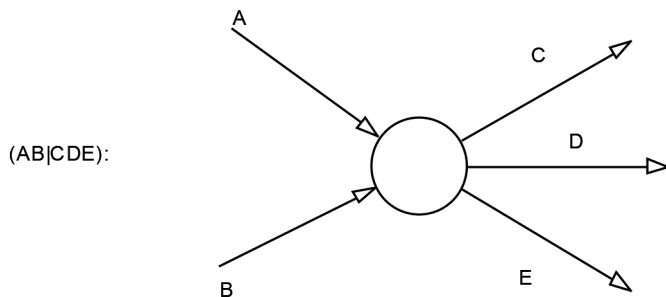
Traktując czas wykonania t jako zmienną losową o rozkładzie jednomodalnym β , można na podstawie, i obliczyć przeciętny czas oczekiwany zgodnie z wzorem:

$$T = \frac{t_1 + 4t_0 + t_2}{6}, \quad (37)$$

oraz jego wariancję

$$V = \left(\frac{t_2 - t_1}{6} \right)^2. \quad (38)$$

Przy określaniu struktury sieci czynności, niezmiernie ważne jest ustalenie logicznych powiązań poszczególnych robót i etapów – pozwala to na jednoznaczne wyznaczenie węzłów i łuków sieci. Istnieją różne metody rysowania sieci czynności (*metody w przód, w tył*). Opisana tu zostanie za Mullerem [21] metoda *wyznaczenia incydencji*. Węzły w tej metodzie oznaczone będą następująco: $(AB|CDE)$ – co oznacza, że do węzła wchodzi (kończą w nim) czynności AB, zaś wychodzą z niego (zaczynają się) czynności CDE (rys. 28).



Rys. 28. Interpretacja oznakowania węzłów

Na podstawie logicznych powiązań ustalona zostanie sekwencja następstw czynności, która umożliwi odszukanie węzłów sieci w postaci z rysunku 28 jednoznacznie wyznaczających całą sieć. Mogą tu zaistnieć następujące przypadki szczególnie:

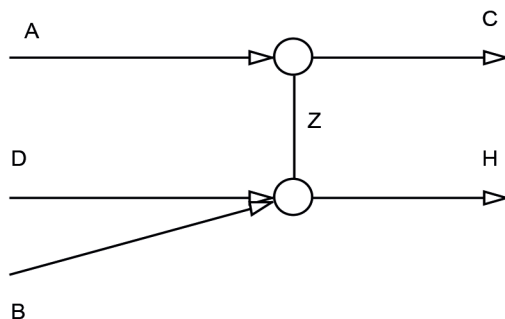
1. Na liście węzłów pojawiają się dwa węzły pozornie różne, posiadające jednakowe czynności wchodzące (po lewej stronie znaku „|”) np.

$$(A|BC), (A|D)$$

2. Na liście węzłów pojawiają się dwa węzły różne, ale posiadające jedną czynność wspólną np.

$$(AB|C), (DB|H).$$

Pierwszy przypadek oznaczałby istnienie dwóch różnych etapów zakończenia czynności A , co jest niemożliwe i nakazuje połączyć węzły $(A|BC)$ i $(A|D)$ w jeden węzeł $(A|BCD)$. W drugim przypadku czynność B również kończyć się powinna w dwóch różnych etapach, co jest niemożliwe. Nie można jednak połączyć dwóch węzłów w jeden, ponieważ kończą się w nich różne zdarzenia A i D . Trudność ta zostanie pokonana przez wprowadzenie czynności fikcyjnej Z o zerowym czasie trwania, zastępując węzły $(AB|C)$, $(DB|H)$ przez $(AZ|C)$, $(DB|HZ)$ (rys. 29).



Rys. 29. Wprowadzanie czynności fikcyjnej

W ten sposób linia zerowa Z przenosi równoczesność zakończenia czynności B do węzła $(AZ|C)$.

Zastosowanie analizy sieciowej rozważone zostanie na następującym prostym przykładzie. Przedsięwzięciem realizowanym jest organizacja rajdu studenckiego. Ustalono listę czynności niezbędną do zrealizowania rajdu, zamieszczoną w poniższej tabelce. Czasy widniejące w tabeli oceniono na podstawie doświadczeń organizatorów innych rajdów. W kolejnej tabeli przedstawiona jest logiczna sekwencja następstw, przy czym cała tabela jest wynikiem ostatnich dwóch kolumn, z których przedostatnia zawiera czynno-

ści, jakie nieodzownie powinny poprzedzać czynności wypisane w kolumnie ostatniej.

<i>Symbol. czynności</i>	<i>Nazwa czynności</i>	t_1	t_2	t_0	T
<i>A</i>	<i>wybór komitetu</i>	<i>1</i>	<i>6</i>	<i>2</i>	<i>2,5</i>
<i>B</i>	<i>ustalenie i sprawdzenie tras</i>	<i>5</i>	<i>15</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
<i>C</i>	<i>druk i rozwieszenie plakatów</i>	<i>10</i>	<i>20</i>	<i>14</i>	<i>16</i>
<i>D</i>	<i>druk i wysyłka propozycji</i>	<i>5</i>	<i>14</i>	<i>7</i>	<i>7,5</i>
<i>E</i>	<i>produkcja znaczka rajdowego</i>	<i>10</i>	<i>20</i>	<i>14</i>	<i>16</i>
<i>F</i>	<i>przyjmowanie zgłoszeń</i>	<i>7</i>	<i>14</i>	<i>10</i>	<i>10</i>
<i>G</i>	<i>rezerwacja noclegów</i>	<i>4</i>	<i>14</i>	<i>7</i>	<i>7,5</i>
<i>H</i>	<i>rezerwacja pociągu powrotnego</i>	<i>1</i>	<i>7</i>	<i>3</i>	<i>3,5</i>
<i>I</i>	<i>organizacja zakończenia</i>	<i>2</i>	<i>10</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>J</i>	<i>zaproszenie gości oficjalnych</i>	<i>2</i>	<i>10</i>	<i>7</i>	<i>6,5</i>
<i>K</i>	<i>obsługa rozpoczęcia rajdu</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>L</i>	<i>obsługa tras rajdowych w czasie rajdu</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>4</i>
<i>M</i>	<i>obsługa zakończenia</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

Dopisanie w kolejnych kolumnach poprzedników określonej czynności pozwala na wyeliminowanie zbędnych poprzedników bezpośrednich (z kolumny przedostatniej). Na przykład, jeśli *C* musi być poprzedzone przez *A* i *B*, zaś skądinąd wiadomo, że *B* musi być poprzedzone przez *A* to wystarczy stwierdzenie, że *C* musi mieć jako poprzednik *B*. Po dokonaniu takiej eliminacji, ustalona zostanie listę węzłów (czynność *0* oznacza czynność inicjującą):

	<i>poprz.</i>	<i>poprz.</i>	<i>poprz.</i>	<i>poprz.</i>	<i>poprz.</i>	<i>poprz.</i>	<i>czynność</i>
-	-	-	-	-	-	<i>0</i>	<i>A</i>
-	-	-	-	-	<i>0</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
-	-	-	-	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
-	-	-	-	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>B</i>	<i>D</i>
-	-	-	-	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>B</i>	<i>E</i>

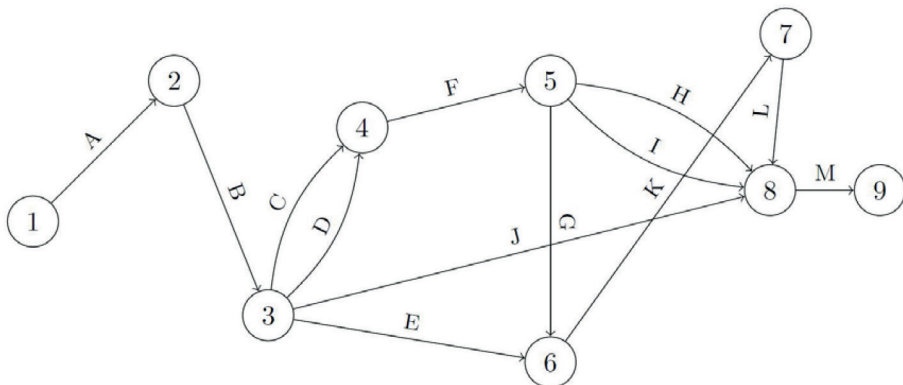
-	-	-	0	0A	AB	CD	F
-	-	0	0A	0A	ACD	F	G
-	-	0	0A	0A	ACD	F	H
-	-	0	0A	0A	ACD	F	I
-	-	-	-	0	0	B	J
-	0	0A	0AB	0ABCD	ACDB	GE	K
0	0A	0AB	0ABCD	ABCDF	GFE	K	L
0	0A	0AB	0ABCD	0ABCDF	KABF	LJIH	M

$(0|A)$, $(A|)$, $(B|C)$, $(B|D)$, $(B|E)$, $(CD|F)$, $(F|G)$, $(F|H)$, $(F|I)$, $(B|J)$, $(GE|K)$, $(K|L)$, $(LJIH|M.)$.

Na podstawie redukcji, zgodnie ze wskazaniami wymienionymi w punktach 1 i 2, ostateczna lista węzłów przedstawia się następująco:

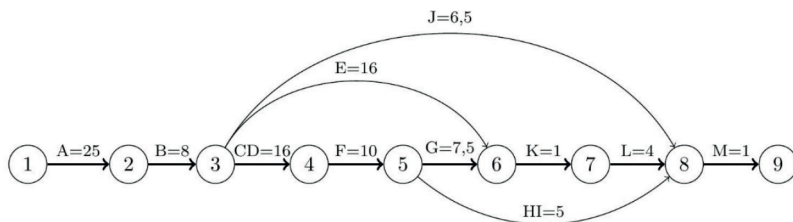
1. $(0|A)$
2. $(A|B)$
3. $(B|CDEJ)$
4. $(CD|F)$
5. $(F|GHI)$
6. $(GE|K)$
7. $(K|L)$
8. $(LJIH|M.)$

Prowadzi to do sieci na rysunku 30.



Rys. 30. Sieć zależności czynności przy organizacji rajdu

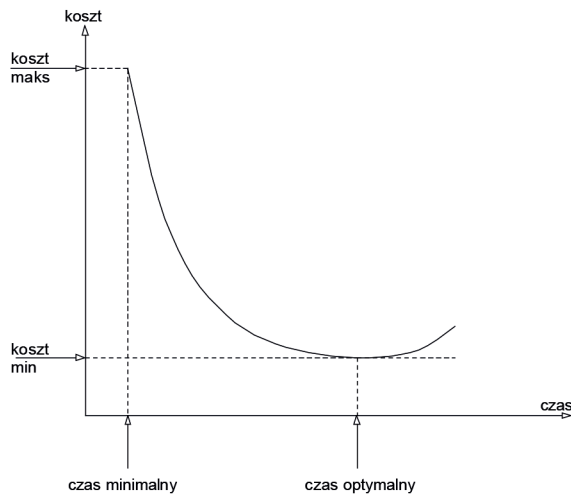
Już po narysowaniu sieci widać, niedopuszczalną z punktu widzenia struktury grafu rzecz, która uszła uwadze – mianowicie każda z par węzłów 3 i 4 oraz 5 i 8 jest połączona dwoma łukami. Wynika stąd wniosek, że czynności *C* i *D* stanowią naprawdę jedną czynność *CD*, zaś *H* i *I* jedną czynność *HI*. Ostatecznie sieć czynności przedstawiona została na rys. 31.



Rys. 31. Sieć z rysunku 30 z zaznaczeniem drogi krytycznej

Gdyby ocenić czas niezbędny do przeprowadzenia rajdu dodając czasy z tabeli, to wynik wyniesie 88,5 dnia. Oczywiście jest jednak, że pewne czynności mogą być wykonywane równocześnie, w związku z czym czas ten może ulec skróceniu. Które to są czynności i jakie jest ich chronologiczne powiązanie obrazuje rysunek 31. Każdy łatwo się zgodzi, że wynika z niego, iż minimalny czas niezbędny do realizacji przedsięwzięcia nie może być krótszy niż najdłuższa z dróg łącząca węzeł 1 z węzłem 9. Taka droga w grafie zależności czasowych nosi nazwę **drogi krytycznej**, a czynności, które na niej leżą nazywają się **czynnościami krytycznymi**. Drogi krytycznej poszukuje się metodą Forda (na rysunku 31 zaznaczono ją pogrubioną linią). Jak można zaobserwować leżą na niej wszystkie etapy (węzły), a jej długość wynosi 50.

Widać, że analizowane przedsięwzięcie posiada tylko trzy niekrytyczne czynności: *E*, *J*, *HI*. Czynności te mogą być opóźnione w pewnych granicach bez ryzyka opóźnienia realizacji całości zadania. Żadna natomiast z czynności krytycznych nie może być opóźniona bez narażenia na opóźnienie całego przedsięwzięcia. Oczywiście, jeśli dysponuje się ograniczonymi środkami na realizację całości projektu, to można analizować przedsięwzięcie pod kątem skrócenia pewnych czynności i wydłużenia innych. Wówczas graf zależności może ulegać zmianie i droga krytyczna może także ulec zmianie. Tego typu analiza nosi nazwę **analizy czas – koszt** i nie zostanie ona tutaj opisana. Warto jednak nadmienić, że typowa zależność czas–koszt dla pojedynczej czynności zaprezentowana jest na rysunku 32, zaś efektem końcowym takiej analizy jest przedstawienie zależności czas–koszt całego przedsięwzięcia na podstawie znajomości zależności czas–koszt dla wszystkich czynności.



Rys. 32. Zależność czas-koszt dla pojedynczej czynności

Inwestor przedsięwzięcia, na podstawie przedstawionej mu zależności czas–koszt, może podjąć decyzję o skróceniu czasu realizacji projektu kosztem poniesienia większych nakładów, ale za to z nadzieją na wcześniejsze osiągnięcie zysków.

Produktem dodatkowym przy poszukiwaniu drogi krytycznej jest zdobycie informacji o tzw. **luzach czasowych** etapów i **zapasach czasu czynności**. Każdy węzeł sieci posiada luz czasowy równy przedziałowi czasu o jaki można opóźnić rozpoczęcie prac wychodzących z danego węzła bez opóźnienia realizacji całości. Jeżeli przez T oznaczony jest czas realizacji całego projektu (długość drogi krytycznej), t_i – najwcześniejszy czas dojścia do węzła i , t'_i – długość drogi krytycznej od węzła i do węzła końcowego, to luz czasowy można zdefiniować wzorem:

$$T_i = T - t'_i - t_i$$

Wszystkie węzły leżące na drodze krytycznej mają luzy czasowe $T_i = 0$. Tak jest dla wszystkich węzłów sieci omawianego przykładu. Zapas czasu czynności łączącej węzeł i z j , jeśli czas jej wykonania wynosi d_{ij} , obliczyć można ze wzoru:

$$t_{ij} = T - t'_j - t_i - d_{ij}$$

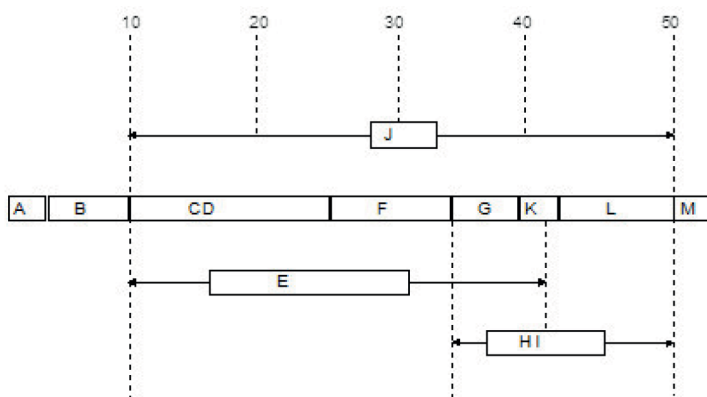
Jest on równy odcinkowi czasu o jaki można opóźnić rozpoczęcie danej czynności bez narażenia się na opóźnienie realizacji całości przedsięwzięcia. Zapasy czasu posiadają tylko czynności niekrytyczne. W omawianym przykładzie istnieją trzy takie czynności, a ich zapasy czasu wynoszą odpowiednio:

$$t_E = 50 - 6 - 10,5 - 16 = 17,5,$$

$$t_J = 50 - 1 - 10,5 - 6,5 = 32,$$

$$t_{HI} = 50 - 1 - 36,5 - 5 = 7,5.$$

Wykres Gantta dla rozpatrywanego projektu przedstawiony jest na rysunku 33.



Rys. 33. Wykres Gantta dla czynności występujących przy organizacji rajdu

9. PROGRAMY KOMPUTEROWE W ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ OPTYMALIZACJI

W rozdziale trzecim niniejszej książki oraz kolejnych zaprezentowano, jak rozwiązywać zadania optymalizacji przy pomocy pakietu MS Excel. W rozdziale bieżącym zostaną wskazane przykłady oraz Czytelnik zostanie zachęcony do poszukania oprogramowania, przy pomocy którego będzie mógł rozwiązywać bardziej złożone problemy z dziedziny badań operacyjnych. Oczywiście posiadanie programu takiego jak Excel wystarcza do wielu, nawet bardzo skomplikowanych zadań ale warto wiedzieć, że są dostępne narzędzia specjalistyczne dedykowane do zadań, o których mowa w niniejszej książce.

Jeśli sprawa traktowana będzie zawodowo, to należy zakupić właściwy program. Jeśli jednak oprogramowanie ma być wykorzystywane w celach dydaktycznych, niekomercyjnych to po pierwsze, można w sieci znaleźć bogate źródło programów darmowych, a po drugie, z niektórych zaawansowanych programów komercyjnych można korzystać na zasadzie wersji testowych. Aby skorzystać z jednego z przedstawionych rozwiązań należy wpisać w dowolnej wyszukiwarce hasło tematyczne (np. „*linear programming*”), a otrzyma się długą listę adresów.

W dalszym ciągu zaprezentowane zostaną trzy przykłady oprogramowania, mianowicie: program darmowy, program komercyjny w wersji testowej, oraz darmowy język oprogramowania R. Wersje testowe posiadają zawsze pewne ograniczenia w stosunku do pełnych wersji komercyjnych, ale najczęściej nie są to ograniczenia istotne dla zastosowań domowych. Wykorzystanie tych trzech programów zostanie zilustrowane przykładem z rozdziału drugiego dotyczącego zakładu wykorzystującego blachę i pleksiglas do wytwarzania dwóch rodzajów wyrobów.

Dla wygody zostanie w tym miejscu przypomniany zapis matematyczny wspomnianego zadania:

Maksymalizacja podlegała funkcja celu:

$$f = 3\,900 x_1 + 3\,850 x_2$$

przy spełnieniu następujących ograniczeń:

Ograniczenie 1: $7\,100 x_1 + 4\,150 x_2 \leq 500\,000.$

Ograniczenie 2: $12x_1 + 16x_2 \leq 1040.$

Ograniczenie 3: $2x_1 + 0,5x_2 \leq 1000.$

Ograniczenie 4: $x_1 + 2x_2 \leq 200.$

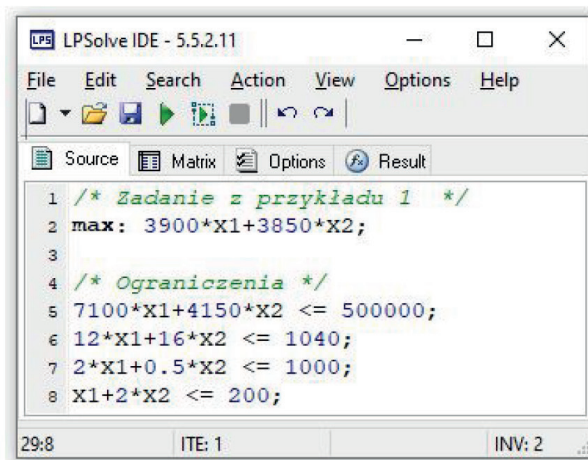
dla $x_1 \geq 0$ oraz $x_2 \geq 0.$

9.1. PROGRAM LP_SOLVE

Wersja która zostanie użyta do opisu to wersja 5.5.2.11. Została ona pobrana ze strony internetowej <https://sourceforge.net/projects/lpsolve/>.

Po instalacji i uruchomieniu programu pojawiają się dwa okna. W jednym z nich wpisuje się kod źródłowy, który po skompilowaniu wyświetla rozwiązanie w drugim oknie, zwanym oknem wynikowym. Więcej informacji na temat składni i sposobów rozwiązywania zadań można odszukać w pomocy lub na stronie <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/>

Poniżej przedstawiony został sposób rozwiązania zadania z przykładu 1.



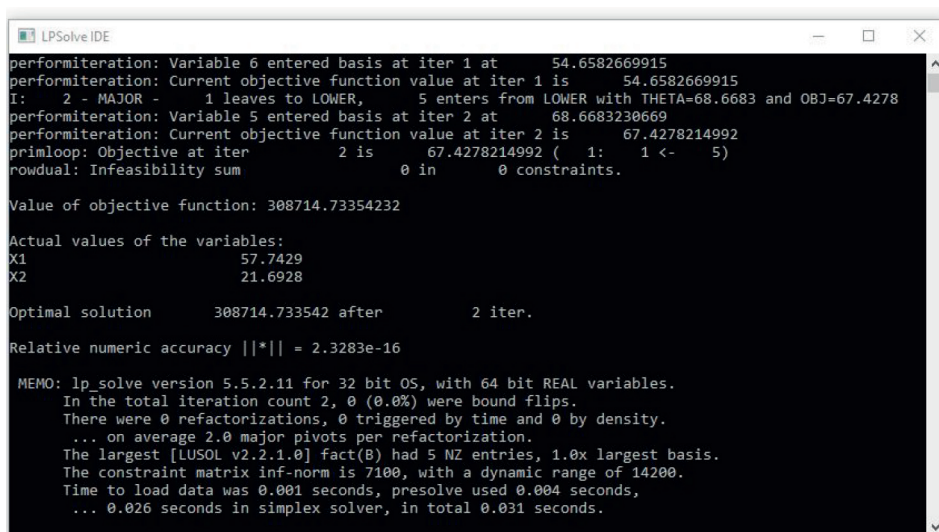
The screenshot shows the LPSolve IDE - 5.5.2.11 window. The menu bar includes File, Edit, Search, Action, View, Options, and Help. The toolbar contains icons for file operations and execution. The 'Source' tab is active, displaying the following code:

```
1  /* Zadanie z przykładu 1 */
2  max: 3900*x1+3850*x2;
3
4  /* Ograniczenia */
5  7100*x1+4150*x2 <= 500000;
6  12*x1+16*x2 <= 1040;
7  2*x1+0.5*x2 <= 1000;
8  x1+2*x2 <= 200;
```

The status bar at the bottom shows '29:8', 'ITE: 1', and 'INV: 2'.

Rys. 34. Źródło i sposób wpisywania kodu

Po kliknięciu w przycisk do kompilacji otrzymuje się wynik, jak na rysunku poniżej.



```
LPSolve IDE
performiteration: Variable 6 entered basis at iter 1 at      54.6582669915
performiteration: Current objective function value at iter 1 is      54.6582669915
I:   2 - MAJOR -      1 leaves to LOWER,      5 enters from LOWER with THETA=68.6683 and OBJ=67.4278
performiteration: Variable 5 entered basis at iter 2 at      68.6683230669
performiteration: Current objective function value at iter 2 is      67.4278214992
primloop: Objective at iter      2 is      67.4278214992 (      1:      1 <-      5)
rowdual: Infeasibility sum      0 in      0 constraints.

Value of objective function: 308714.73354232

Actual values of the variables:
X1      57.7429
X2      21.6928

Optimal solution      308714.733542 after      2 iter.

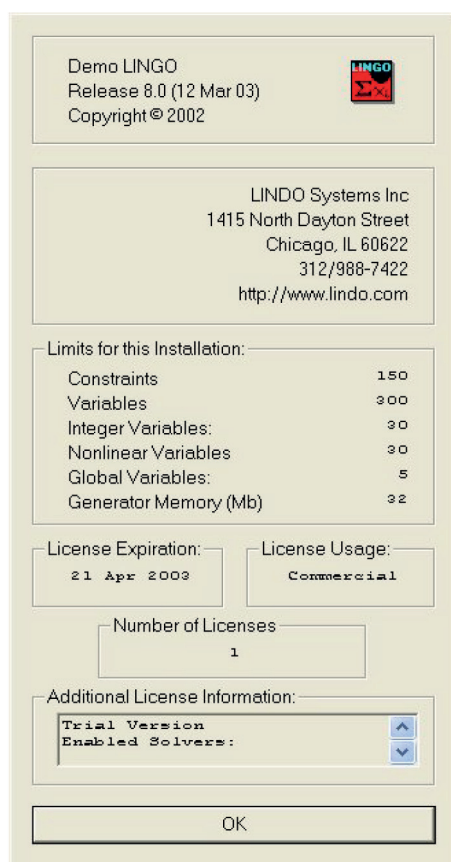
Relative numeric accuracy ||*|| = 2.3283e-16

MEMO: lp_solve version 5.5.2.11 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 2, 0 (0.0%) were bound flips.
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 2.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 5 NZ entries, 1.0x largest basis.
The constraint matrix inf-norm is 7100, with a dynamic range of 14200.
Time to load data was 0.001 seconds, presolve used 0.004 seconds,
... 0.026 seconds in simplex solver, in total 0.031 seconds.
```

Rys. 35. Ekran wynikowy

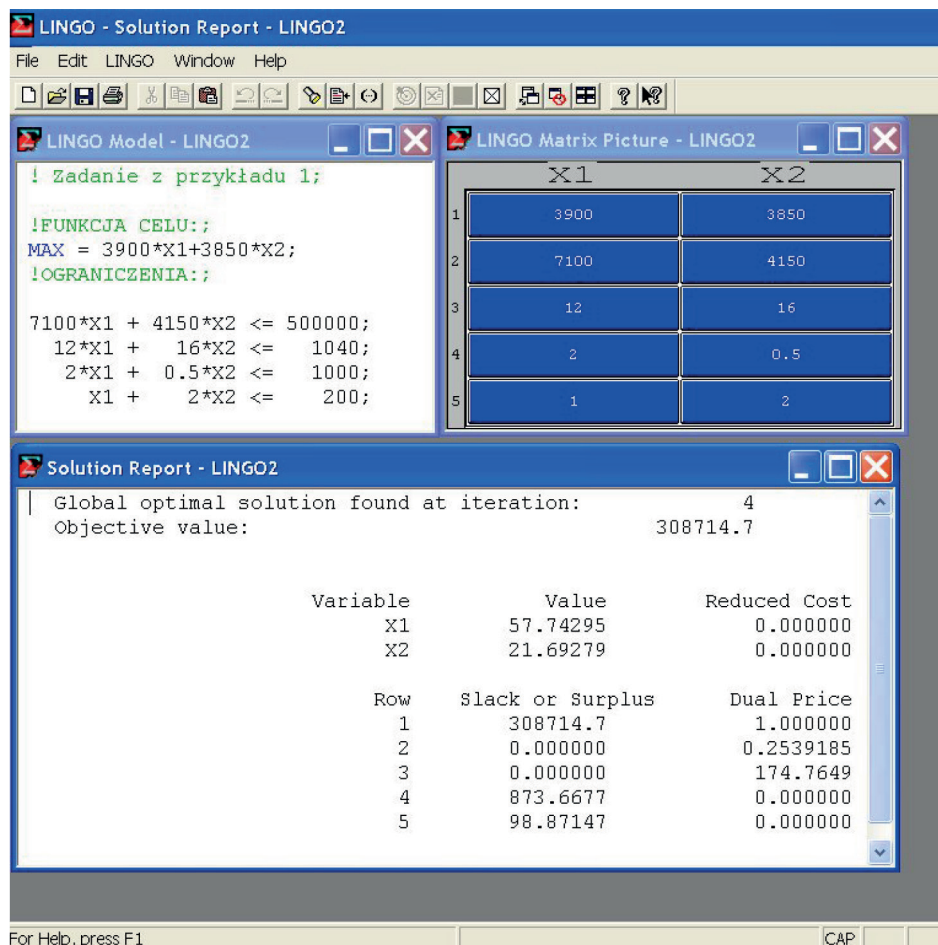
9.2. PAKIET LINDO

Dla kontrastu z prostym darmowym produktem jakim jest lp_solve pokazany zostanie przykład bardzo zaawansowanego, komercyjnego środowiska do rozwiązywania zadań optymalizacji firmy Lindo Systems Inc. Na rysunku poniżej został zaprezentowany opis jednego z jej produktów – Lingo w wersji 8. Został on załadowany ze strony producenta, jako produkt w wersji testowej z ograniczonym czasem wykorzystania. Aby otrzymać taką wersję próbną należy zarejestrować się na stronie producenta. Lingo jest bogatym środowiskiem do modelowania i rozwiązywania zadań z badań operacyjnych. Jest programem z graficznym interfejsem oraz posiada wyczerpujący podręcznik z którego można się nauczyć zarówno modelowania, jak i rozwiązywania zadań optymalizacji. Posiada również wiele udogodnień stworzonych dla użytkownika.



Rys. 36. Informacje o pakiecie Lingo v. 8

Rozwiązanie zadania pokazano na rysunku 37.



Rys. 37. Dane wejściowe, graficzny obraz macierzy zadania i wyniki w środowisku Lingo

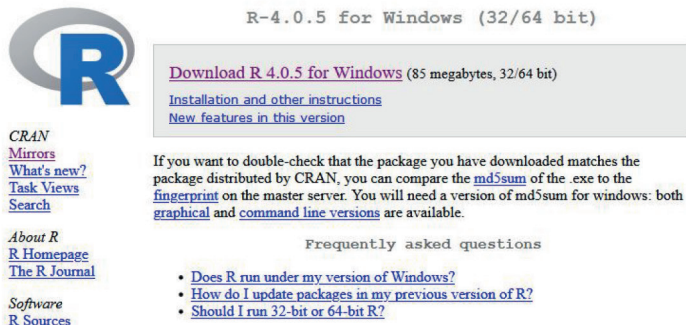
Zarówno w sieci, jak w reklamowych prospektach można znaleźć wiele innych produktów do wspomagania rozwiązywania problemów z badań operacyjnych. Czytelnik może zainteresować się nimi w sytuacji, kiedy nie stać go na zakup produktów MS Office lub innych drogich programów.

9.3. OPROGRAMOWANIE R

Oprogramowanie R to nie tylko język programowania, ale również środowisko obliczeniowe i graficzne, które idealnie sprawdza się do obliczeń statystycznych, analizy dużej ilości danych, czy wizualizacji wyników. Darmowy

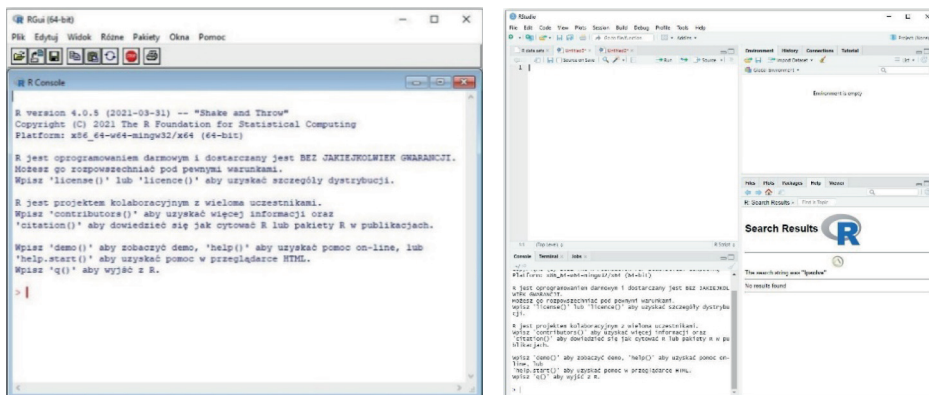
dostęp do tego oprogramowania i mnogość pakietów ułatwiających pracę z danymi wpływa na zwiększanie jego popularności, szczególnie wśród analityków danych.

Program R można pobrać ze strony internetowej <https://cran.r-project.org/>. Należy wybrać odpowiedni system operacyjny, pobrać oprogramowanie i je zainstalować. Obecna wersja dla Windows to R-4.0.5.



Rys. 38. Widok strony z linkiem do oprogramowania

Dla ułatwienia pracy z programem zalecane jest zainstalowanie edytora RStudio <https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>. Poniżej został zaprezentowany widok R i R-Studio po uruchomieniu.



Rys. 39. Poglądowy obraz R oraz R-studio po uruchomieniu

Zilustrowane zostanie teraz rozwiązanie w programie R problemu maksymalizacji dla funkcji f_z rozdziału drugiego. W tym celu zainstalowany zostanie pakiet lpSolve, który należy dodać do biblioteki następującymi komendami:

```
>install.packages("lpSolve")
>library("lpSolve")
```

Problem optymalizacji zaprezentowany zostanie graficznie przy użyciu grafiki wbudowanej w R. Można również wykorzystać pakiet ggplot2. W celu instalacji pakietu ggplot2, należy wpisać komendy analogicznie jak powyżej:

```
>install.packages("ggplot2")
>library("ggplot2")
```

Omawiany w rozdziale drugim problem maksymalizacji był opisany za pomocą następującego modelu matematycznego:

Funkcja celu

$$f = 3\,900 x_1 + 3\,850 x_2$$

Ograniczenia:

$$\begin{aligned} 7\,100 x_1 + 4\,150 x_2 &\leq 500\,000, \\ 12 x_1 + 16 x_2 &\leq 1040, \\ 2 x_1 + 0,5 x_2 &\leq 1000, \\ x_1 + 2 x_2 &\leq 200, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie w R przy użyciu funkcji lp z pakietu lpSolve

```
# do f przypisane zostają współczynniki funkcji celu
f <- c(3900, 3850)
```

```
# L - macierz współczynników stojących
# przy zmiennych w układzie ograniczeń
```

```
L <- matrix(c(7100, 4150,
              12, 16,
              2, 0.5,
              1, 2), nrow=4, byrow=TRUE)
```

```
# b - prawe strony ograniczeń
b <- c(500000, 1040, 1000, 200)
```

kierunki nierówności w ograniczeniach

```
kierunki_nierowosci <- c(„<=”, „<=”, „<=”, „<=”)
```

wyznaczenie maksimum funkcji f uwzględniając ograniczenia

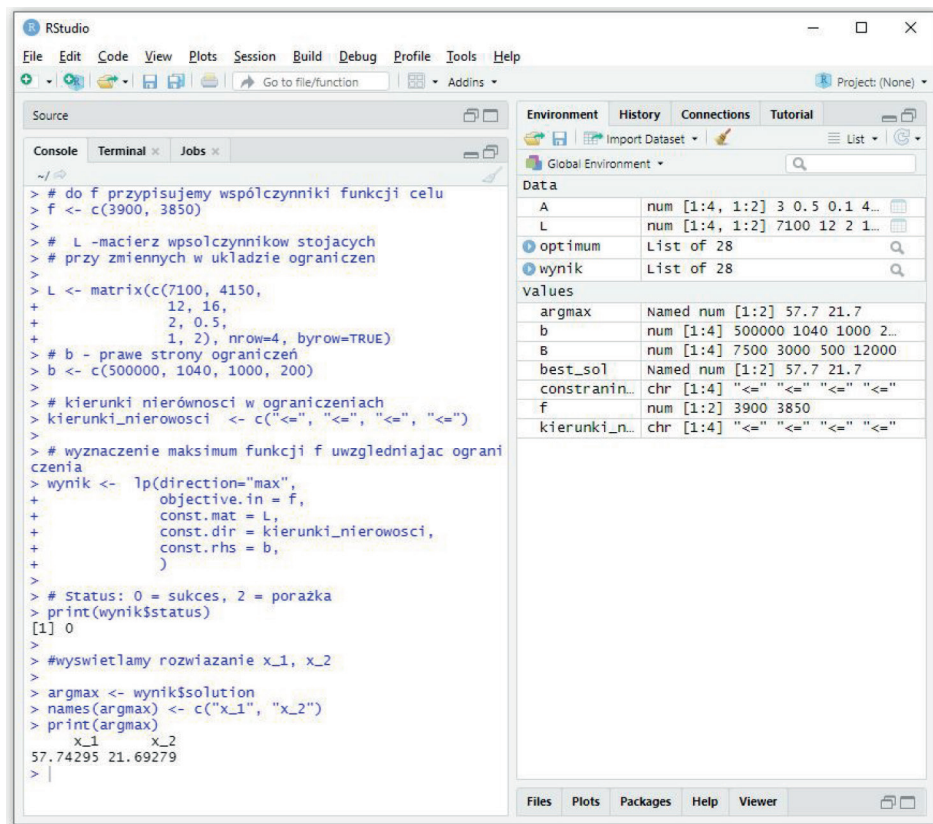
```
wynik <- lp(direction="max",  
            objective.in = f,  
            const.mat = L,  
            const.dir = kierunki_nierowosci,  
            const.rhs = b,  
            all.int = F)
```

Status: 0 = sukces, 2 = porażka

```
print(wynik$status)
```

Wyświetl optymalne wartości dla x_1 , x_2

```
argmax <- wynik$solution  
names(argmax) <- c("x_1", "x_2")  
print(argmax)
```



Rys. 40. Widok rozwiązania w R-Studio

W kolejnym kroku zaprezentowane zostanie graficzne rozwiązanie tego zadania. Jako przykład użyto grafiki wbudowanej w R.

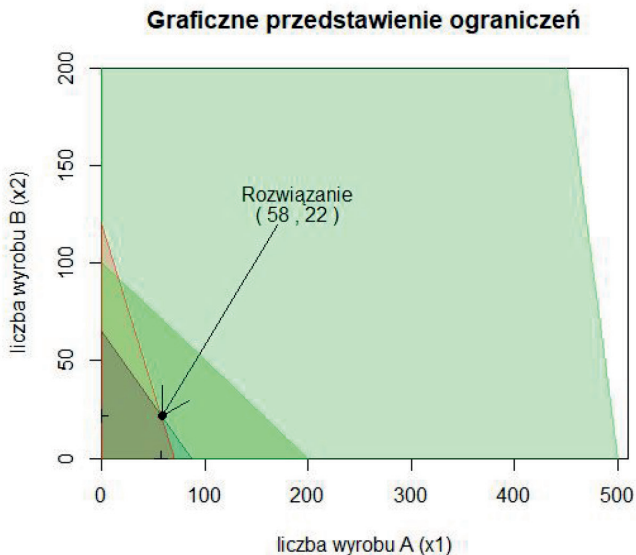
```
funkcja_l <- function(x,a,b){
  y <- a*x + b
  return(y) }
x <- seq(0,600,by=100)
y0 <- funkcja_l(x,a = -0.5,b =100)
y1 <- funkcja_l(x,a = -4,b =2000)
y2 <- funkcja_l(x,a = -12/16,b =1040/16)
y3 <- funkcja_l(x,a = -7100/4150,b =500000/4150)
# Px-pierwsze współrzędne punktów końcowych trojkątów,
# Pyi-drugie wsp. punktów końcowych,
Px = c(0, x, 0)
Py0 = c(0, y0, 0)
```

```

Py1 = c(0, y1,0)
Py2 = c(0, y2, 0)
Py3 = c(0, y3, 0)
plot(1,type="n",xlim=c(0,510),ylim=c(0,200),xlab="liczba wyrobu A (x1)",y-
lab="liczba wyrobu B (x2)"
    ,xaxs="i",yaxs="i",main="Graficzne przedstawienie ograniczeń")
# rysowane są wielokąty po 6 dla każdej z funkcji yi,
polygon(Px,Py0,col=rgb(0, 1, 0, alpha = 0.3), border=rgb(0, 1, 0, alpha = 0.5))
polygon(Px,Py1,col=rgb(0, 1, 0.1, alpha = 0.2), border = rgb(0, 1, 0.1, alpha =
0.5))
polygon(Px,Py2,col=rgb(0, 0, 0.200, alpha = 0.2), border = rgb(0, 0, 0.200, al-
pha = 0.5))
polygon(Px,Py3,col=rgb(1, 0, 0, alpha = 0.2), border = rgb(1, 0, 0, alpha = 0.5))
points(58,22,pch=19)
arrows(170, 120, 58, 22 )
text(190,125,paste("( 58, 22)"))
text(190,135,"Rozwiązanie")
points(57.7,0,pch=3)
points(0,21.7,pch=3)

```

Rezultat przedstawiony został na rysunku poniżej.



Rys. 41. Graficzne przedstawienie ograniczeń

W powyższym rozwiązaniu zmienna x powinna przyjmować przynajmniej dwie wartości, tj. zero i maksimum z przeciwobrazów zera funkcji ograniczeń oznaczonych jako, czyli ich miejsc zerowych.

10. WYBRANE PROJEKTY STUDENTÓW WSEI

W ramach zaliczenia przedmiotu badania operacyjne studenci II roku przygotowywali projekty dotyczące następującej tematyki: programowanie liniowe, programowanie sieciowe, analiza drogi krytycznej – metoda PERT. Poniżej zostały zaprezentowane najciekawsze projekty przedstawione przez studentów.

10.1. Zagadnienie mieszanki

1. Sformułowanie problemu:

Życie studenta to bardzo ciekawe połączenie maksymalizacji aktywności i minimalizacji kosztów. Najbardziej optymalny poziom aktywności osiągniemy między innymi utrzymując organizm przy zdrowiu, poprzez dostarczanie mu niezbędnej ilości wartości odżywczych i witamin.

Zbadamy dwie losowo wybrane multiwitaminy, pod względem ich ceny i zawartości witamin, aby znaleźć tę, która będzie najodpowiedniejsza dla młodego studiującego człowieka.

Multiwitamina *A* zawiera: 0,5 µg witaminy *A*, 30 µg witaminy *E*, 60 mg witaminy *C*, 400 mg kwasu foliowego, 1,5 mg witaminy B_1 , 1,7 mg witaminy B_2 , 2 mg witaminy B_6 , 6 µg witaminy B_{12} , 20 mg witaminy *PP*, oraz 25 µg witaminy *K*.

Koszt jednostkowy wynosi: 0,7117 zł.

Natomiast multiwitamina *B* zawiera: 0,66 µg witaminy *A*, 10 µg witaminy *E*, 60 mg witaminy *C*, 1,4 mg witaminy B_1 , 1,6 mg witaminy B_2 , 2 mg witaminy B_6 , 1 µg witaminy B_{12} , a jej cena za jednostkę wynosi 0,35 zł.

Dzienne zapotrzebowanie na poszczególne witaminy wynosi: 1 mg dla witaminy *A*, 10 µg dla witaminy *E*, 75 mg dla witaminy *C*, 245 mg dla kwasu foliowego, 2 mg dla B_1 , 2 mg dla B_2 , 2 mg dla B_6 , 2 µg dla B_{12} , 15 mg dla witaminy *PP* i 1 mg dla witaminy *K*.

2. Cel naszego zadania:

Celem naszego zadania będzie uzyskanie odpowiedzi na pytanie: Jak dobrać powyższe specyfiki, aby student otrzymywał codziennie niezbędną porcję witamin, a wydał przy tym jak najmniej ze swojego skromnego budżetu? Zatem będzie nam chodziło o znalezienie minimum funkcji:

$$f(x,y) = 0,7117x + 0,35y \rightarrow \min, \text{ gdzie}$$

x – ilość tabletek multiwitaminy A ,

y – ilość tabletek multiwitaminy B ,

przy następujących warunkach:

$$\text{wit. } A \quad 0,5x + 0,66y \geq 1$$

$$\text{wit. } E \quad 30x + 10y \geq 10$$

$$\text{wit. } C \quad 60x + 60y \geq 75$$

$$\text{kw. foliowy} \quad 400x \geq 245$$

$$\text{wit. } B_1 \quad 1,5x + 1,4y \geq 2$$

$$\text{wit. } B_2 \quad 1,7x + 1,6y \geq 2$$

$$\text{wit. } B_6 \quad 2x + 2y \geq 2$$

$$\text{wit. } B_{12} \quad 6x + y \geq 2$$

$$\text{wit. } PP \quad 20x \geq 15$$

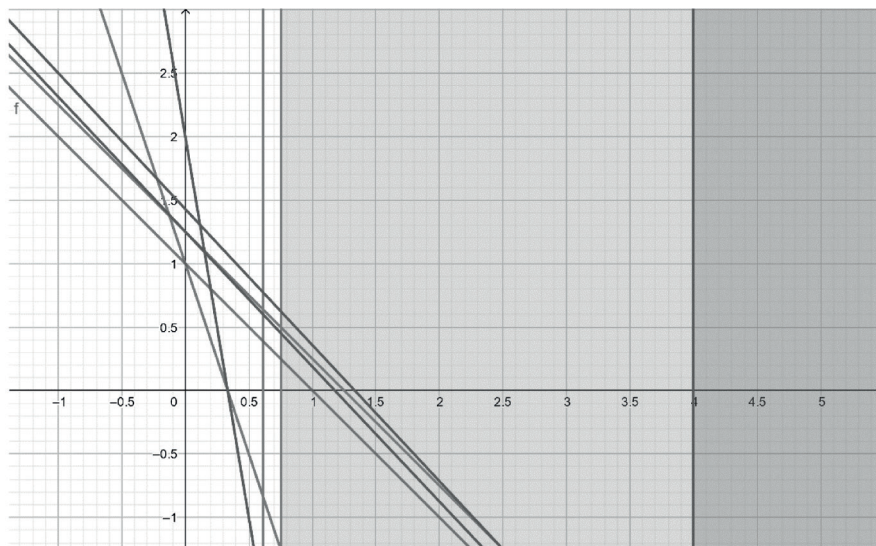
$$\text{wit. } K \quad 0,25x \geq 1$$

3. Rozwiązanie problemu:

Metod rozwiązywania zadań programowania liniowego jest kilka. W poniższym rozdziale zostaną zaprezentowane tylko niektóre z nich.

a) metoda graficzna:

Rozpoczynamy od metody graficznej, którą bez wątpienia możemy uznać za najłatwiejszą. Nawet jeśli student nie bardzo jeszcze orientuje się, co to właściwie jest programowanie liniowe, bez problemu narysuje tego typu zadanie. Wystarczy do tego jedynie wiedza ze szkoły średniej, odnośnie rysowania prostych w układzie współrzędnych:



Rys. 42. Graficzne przedstawienie warunków zadania

Jak widzimy, każdemu sformułowanemu wcześniej ograniczeniu odpowiada jedna prosta. Obszarem rozwiązania będzie obszar ograniczony osiami X i Y , oraz część wspólna leżąca powyżej wszystkich narysowanych prostych. Konkretnym rozwiązaniem będzie natomiast jeden z wierzchołków tego obszaru (według twierdzenia: *Rozwiązanie optymalne programowania liniowego jest rozwiązaniem wierzchołkowym, tzn. punkt x_{opt} jest wierzchołkiem obszaru rozwiązań.*). Punkt optymalny jest najbliższym punktem brzegu obszaru wskazanym przez gradient funkcji celu, jeśli szukane jest minimum.

Z rysunku możemy zatem łatwo odczytać, że będzie to punkt o współrzędnych: $x = 4$, $y = 0$.

b) metoda Simpleks

Zadanie to możemy również rozwiązać przy użyciu algorytmu Simpleks. Polega on na przenoszeniu się z kolejnych rozwiązań wierzchołkowych takich, gdzie wartość funkcji jest mniejsza od poprzedniej. W ten sposób po najwyżej m krokach znajdujemy wierzchołek optymalny dochodząc w ten sposób do rozwiązania zadania. W tym przypadku najlepszym wariantem algorytmu Simpleks będzie tabela, gdzie pojawi się dowolnie duża liczba M ($M \rightarrow \infty$) oraz zmienne sztuczne s . Dla potrzeb tej metody konieczne jest przekształcenie wzoru funkcji oraz jej ograniczeń w następujący sposób:

$$f = 0,7117x_1 + 0,35x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + \\ + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} + Ms_1 + Ms_2 + Ms_3 + Ms_4 + Ms_5 + Ms_6 + Ms_7 + \\ + Ms_8 + Ms_9 + Ms_{10} \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} \text{ograniczenia:} \quad & 0,5x_1 + 0,66x_2 - x_3 + s_1 = 1 \\ & 30x_1 + 10x_2 - x_4 + s_2 = 10 \\ & 60x_1 + 60x_2 - x_5 + s_3 = 75 \\ & 400x_1 - x_6 + s_4 = 245 \\ & 1,5x_1 + 1,4x_2 - x_7 + s_5 = 2 \\ & 1,7x_1 + 1,6x_2 - x_8 + s_6 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_9 + s_7 = 2 \\ & 6x_1 + x_2 - x_{10} + s_8 = 2 \\ & 20x_1 - x_{11} + s_9 = 15 \\ & 0,25x_1 - x_{12} + s_{10} = 1 \end{aligned}$$

gdzie:

$x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$ – zmienne swobodne (osłabiające, bilansujące),
 $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$ – zmienne sztuczne

Następnie tak przekształcone zadanie umieszczamy w tabeli simpleks, którą odpowiednio przekształcamy, aby uzyskać coraz to lepsze rozwiązanie. Polega to na stopniowym wprowadzaniu do bazy zmiennych najbardziej ujemnych (zaznaczone kolorem żółtym – trzecia kolumna I tablicy) w miejsce wiersza, które zapewni nam największy spadek wartości funkcji (zaznaczone kolorem niebieskim – czwarty wiersz I tablicy).

Jak widać w pierwszej tabeli simpleks, najmniejszym ujemnym kryterium simpleks charakteryzuje się zmienna x_1 . Ona zatem wchodzi do bazy w kolejnej iteracji w miejsce zmiennej s_2 , ponieważ

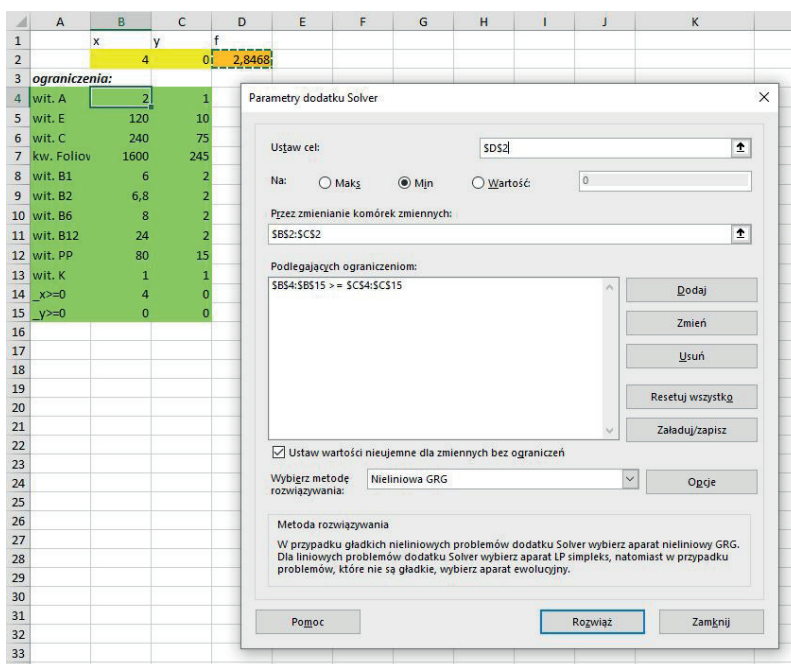
$$\min \left\{ \frac{1}{0,5}, \frac{10}{30}, \frac{75}{60}, \frac{245}{400}, \frac{2}{1,5}, \frac{2}{1,7}, \frac{2}{2}, \frac{2}{6}, \frac{15}{20}, \frac{1}{0,25} \right\} = \frac{1}{3}.$$

Wartości $\frac{1}{3}$ odpowiadają dwie zmienne: s_2 i s_8 . W takim przypadku wybieramy zmienną o niższym indeksie. Z kolei w drugiej tablicy simpleks do bazy wprowadzamy zmienną x_4 w miejsce zmiennej s_4 .

Po m takich przekształceniach dochodzimy do rozwiązania optymalnego równego rozwiązaniom uzyskanym innymi metodami.

c) przy pomocy programu Excel

Do rozwiązywania tego typu problemów można również wykorzystać arkusz kalkulacyjny Excel. Obliczenia są w nim dziecinnie proste, aczkolwiek należy skrupulatnie wprowadzić wszystkie dane, a następnie zastosować narzędzie zwane Solverem:



Rys. 43. Widok narzędzia solver

Dla wyjaśnienia, komórka B4 zawiera formułę $=0,5*B2+0,66*C2$.

Oprócz wykonywania obliczeń Solver oferuje nam również szczegółową analizę uzyskanych wyników w postaci raportów wyników, wrażliwości i granic. Możemy z nich odczytać np., które z ograniczeń ma największy wpływ na wynik:

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

Wynik: Dodatek Solver znalazł rozwiązanie. Wszystkie ograniczenia i warunki optymalizacji są spełnione.

Aparat dodatku Solver

Aparat: Nieliniowa GRG

Czas rozwiązania: 0,031 sek.

Liczba iteracji: 4 Podproblemy: 0

Opcje dodatku Solver

Maksymalny czas Nieograniczone, Iteracje Nieograniczone, Precision 0,000001, Użyj skalowania automatycznego

Zbieżność 0,0001, Rozmiar populacji 100, Inicjator losowy 0, Pochodne w przód, Wymagaj granic

Maksymalna liczba podproblemów Nieograniczone,

Maksymalna liczba rozwiązań całkowitoliczbowych Nieograniczone, Tolerancja całkowitoliczbową 1%, Przyjmij nieujemne

Komórka celu (Min)

Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa
\$D\$2	f	0	2,8468

Komórki zmiennych

Komórka	Nazwa	Wartość początkowa	Wartość końcowa	Całkowite
\$B\$2	x	0	4	Ciągłe
\$C\$2	y	0	0	Ciągłe

Ograniczenia

Komórka	Nazwa	Wartość komórki	Formuła	Stan	Zapas czasu
\$B\$4	wit. A x	2	\$B\$4>=\$C\$4	Niewiążące	1
\$B\$5	wit. E x	120	\$B\$5>=\$C\$5	Niewiążące	110
\$B\$6	wit. C x	240	\$B\$6>=\$C\$6	Niewiążące	165
\$B\$7	kw. Foliowy x	1600	\$B\$7>=\$C\$7	Niewiążące	1355
\$B\$8	wit. B1 x	6	\$B\$8>=\$C\$8	Niewiążące	4
\$B\$9	wit. B2 x	6,8	\$B\$9>=\$C\$9	Niewiążące	4,8
\$B\$10	wit. B6 x	8	\$B\$10>=\$C\$10	Niewiążące	6
\$B\$11	wit. B12 x	24	\$B\$11>=\$C\$11	Niewiążące	22
\$B\$12	wit. PP x	80	\$B\$12>=\$C\$12	Niewiążące	65
\$B\$13	wit. K x	1	\$B\$13>=\$C\$13	Wiążące	0
\$B\$14	_x>=0 x	4	\$B\$14>=\$C\$14	Niewiążące	4
\$B\$15	_y>=0 x	0	\$B\$15>=\$C\$15	Wiążące	0

Rys. 44. Tabela wynikowa z dodatku solver

Z raportu wyników widzimy, że wpływ miało ograniczenie 10 (na witaminę K) oraz założenie, że y musi być większy lub równy 0. Mówi nam o tym „zerowy” luz, przy tych ograniczeniach oraz ich status – oznaczony jako „wiążące”. Tę samą informację możemy odczytać z raportu wrażliwości, tam natomiast stopień istotności danych ograniczeń określany jest przez tzw. mnożnik Lagrange’a:

Komórka	Nazwa	Wartość końcowa	Mnożnik Lagrange'a
\$B\$4	wit. A x	2	0
\$B\$5	wit. E x	120	0
\$B\$6	wit. C x	240	0
\$B\$7	kw. foliowy x	1600	0
\$B\$8	wit. B1 x	6	0
\$B\$9	wit. B2 x	6,8	0
\$B\$10	wit. B6 x	8	0
\$B\$11	wit. B12 x	0,024	0
\$B\$12	wit. PP x	80	0
\$B\$13	wit. K x	1	2,846800089
\$B\$14	$-x \geq 0$ x	4	0
\$B\$15	$-y \geq 0$ x	0	0,349999994

4. Postać kanoniczna zadania:

Postać kanoniczna, to taki przypadek programowania liniowego, gdzie wszystkie ograniczenia są równościami. Aby tego dokonać musimy najpierw przedstawić nasze zadanie w standardowej postaci macierzowej:

$$f = c^T x \rightarrow \min,$$

przy warunkach:

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \text{ gdzie:}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0,7117 \\ 0,35 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,66 \\ -30 & -10 \\ -60 & -60 \\ -400 & 0 \\ -1,5 & -1,4 \\ -1,7 & -1,6 \\ -2 & -2 \\ -6 & -1 \\ -20 & 0 \\ -0,25 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \\ -75 \\ -245 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -15 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Postać dualna zadania:

Do każdego typu zadania możemy sformułować odpowiadające mu zadanie dualne. Funkcja celu posiada wtedy tyle zmiennych, ile było ograniczeń w zadaniu pierwotnym i jeśli w zadaniu pierwotnym była minimalizowana to teraz będziemy stawiać problem maksymalizacji. Funkcja celu ma więc następującą postać:

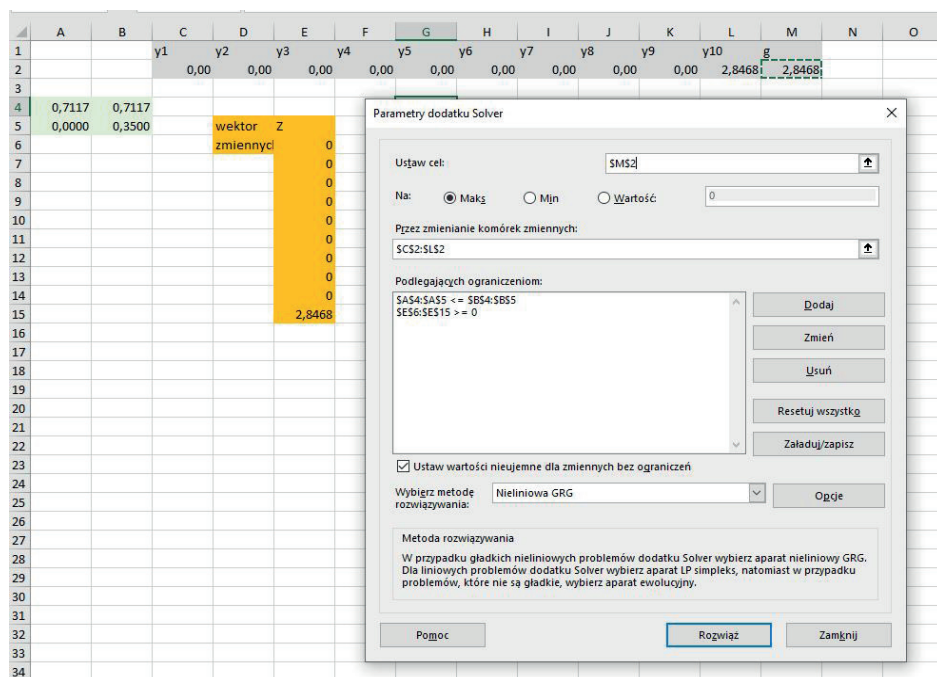
$$g = y_1 + 10y_2 + 75y_3 + 245y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + 2y_8 + 15y_9 + y_{10} \rightarrow \max$$

natomiast ograniczeń będzie tyle, ile było zmiennych funkcji celu w zadaniu pierwotnym, o znaku nierówności przeciwnym niż w zadaniu pierwotnym:

$$0,5y_1 + 30y_2 + 60y_3 + 400y_4 + 1,5y_5 + 1,7y_6 + 2y_7 + 6y_8 + 20y_9 + 0,25y_{10} \leq 0,7117$$

$$0,66y_1 + 10y_2 + 60y_3 + 1,4y_5 + 1,6y_6 + 2y_7 + y_8 \leq 0,35$$

Po wykonaniu obliczeń w programie Excel, wyniki kształtują się następująco:



Rys. 45. Wyniki z programu Excel

Jak widzimy, tylko ostatnia – dziesiąta zmienna jest niezerowa. Oznacza to, że tylko ostatnie ograniczenie ma wpływ na naszą dualną funkcję celu. Ma ono postać:

$$0,25x = 1,$$

co po obliczeniu daje nam $x = 4$. Z powyższych obliczeń wykonanych w Excelu wiemy ponadto, że nasza druga zmienna – y , jest równa zero, ponieważ pozostałe czynniki wektora Z są zerowe.

Otrzymaliśmy zatem wynik $x = 4$, $y = 0$.

6. Interpretacja wyników:

Niezależnie od tego, jaką metodę stosowaliśmy, otrzymaliśmy jeden wynik. Według naszych obliczeń funkcja celu osiągnie minimum w punkcie o współrzędnych: $x = 4$, $y = 0$ i przyjmuje wartość 2,8468.

W praktyce oznacza to, że student chcąc uzyskać odpowiednią porcję witamin i zminimalizować koszty tego przedsięwzięcia powinien wybrać specyfik A w ilości 4 tabletek dziennie, co będzie kosztowało go 2,85 zł. Zdecydowanie natomiast powinien odrzucić specyfik B , który w tym przypadku okazał się nieekonomiczny.

Jako ciekawostkę można dodać, że gdyby nie zawartość w multiwitaminie witaminy K , a zatem przy braku ostatniego z naszych ograniczeń, opłacalność preparatu B znacznie wzrosłaby. Wtedy wynik naszych rozważań byłby następujący:

$$x = 0,75, y = 0,94697.$$

Możemy zatem pokusić się o stwierdzenie, że ograniczenie na witaminę K miało kluczowe znaczenie na wynik naszych badań.

10.2. Maksymalizacja zysku

1. Cel projektu

Celem niniejszego projektu jest opracowanie i rozwiązanie zadania mającego na celu ustalenie struktury produkcji **Przedsiębiorstwa Produkcyjno-Handlowego „Kabacik”** na podstawie zebranych danych tak, aby miesięczny zysk był maksymalny.

2. Zadanie praktyczne

2.1. Dane potrzebne do opracowania zadania.

Przedmiotem naszego projektu jest opracowanie i rozwiązanie zadania pomocnego dla PPH „Kabacik” w ustaleniu miesięcznej struktury produkcji, tak aby zysk z tej produkcji był maksymalny. Nasze przedsiębiorstwo zajmuje się produkcją i sprzedażą płaszczy zimowych: damskich i męskich. Przedsiębiorstwo jest w fazie przygotowawczej do nadchodzącego sezonu, który trwa od września do marca. Ilość surowców potrzebnych do wyprodukowania każdego z wyrobów oraz cenę każdego z surowców przedstawia poniższa tabela:

Surowce	Płaszcze damskie (x_1)	Płaszcze męskie (x_2)	Ceny surowców
Materiał	2,8 m	2 m	40 zł/m
Podszewka	2 m	1,2 m	5 zł/m
Ocieplacz	1,2 m	1,2 m	2,5 zł/m
Sztywne płótno	1 m	1,5 m	2 zł/m
Detale dodatkowe	10 zł	10 zł	—
Robocizogodzina	3 robocizogodz.	4 robocizogodz.	8 zł/h
Cena 1 sztuki płaszcza	350	300	—

Zakład przez tzw. „okres martwy” tj. od marca do lipca miał zawieszoną działalność. W sierpniu zaczęły się przygotowania do sezonu, jednak z uwagi na dość spore ożywienie w branży krawieckiej w tym roku, przedsiębiorstwo ma do dyspozycji ograniczoną ilość niektórych surowców. Są to:

1. Materiał maksymalnie 1000 m
2. Ocieplacz nie więcej niż 350 m

Firma w miesięcznym okresie rozliczeniowym zatrudnia 5-osobową załogę, która pracuje 26 dni w miesiącu – tj. w dni robocze oraz soboty, za które pracownicy mają ekstra wynagrodzenie. Miesięczny budżet na zakup surowców wynosi 50 000 zł.

2.2. Konstrukcja zadania

a) wyznaczenie funkcji celu:

Aby ustalić funkcję celu musimy obliczyć koszty produkcji płaszczy damskich i męskich.

- ustalamy koszt produkcji 1 sztuki płaszcza damskiego:

$$2,8 \cdot 40 + 2 \cdot 5 + 1,2 \cdot 2,5 + 1 \cdot 2 + 10 + 3 \cdot 8 = 161$$

czyli zysk osiągnany na jednej sztuce płaszcza damskiego wynosi:
 $350 - 161 = 189$ (w złotych)

- ustalamy koszt produkcji 1 sztuki płaszcza męskiego:

$$2 \cdot 40 + 1,2 \cdot 5 + 2,5 + 1,5 \cdot 2 + 10 + 4 \cdot 8 = 137$$

czyli zysk osiągnany na jednej sztuce płaszcza męskiego wynosi:
 $300 - 137 = 163$ (w złotych)

Przyjmijmy, że:

x_1 – to planowana ilość wyprodukowania płaszczy damskich,

x_2 – to planowana ilość wyprodukowania płaszczy męskich,

zatem maksymalny zysk całkowity będzie opisany następującą funkcją celu:

$$F(x_1, x_2) = 189x_1 + 163x_2 \rightarrow \max$$

b) warunki ograniczające:

- budżet

Miesięczny budżet firmy na surowce wynosi 50 000 zł. Biorąc pod uwagę koszt produkcji 1 sztuki każdego z wyrobów ustalamy nasz pierwszy warunek ograniczający:

$$161x_1 + 137x_2 \leq 50000$$

Założenie to mówi, iż przy wielkości produkcji płaszczy damskich równej x_1 i płaszczy męskich równej x_2 , wydatek na surowce, z których produkowane są wyroby nie może być większy od 50 000zł.

- czas pracy

Firma w miesięcznym okresie rozliczeniowym zatrudnia 5 pracowników, którzy pracują średnio 26 dni w miesiącu. Mając te dane obliczamy poniżej czas pracy całej załogi w roboczogodzinach przez okres jednego miesiąca:

$$5 \text{ osób} \cdot 26 \text{ dni/miesiąc} \cdot 8 \text{ h/dzień} = 1040 \text{ roboczogodzin}$$

Z powyższych danych tworzymy ograniczenie:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1040$$

Oznacza ono, iż przy wielkości produkcji płaszczy damskich równej x_1 i płaszczy męskich równej x_2 czas pracy przy wykonaniu tych wyrobów nie może przekroczyć 1040 roboczogodzin.

- magazynowane surowce

W magazynie mamy do dyspozycji zgromadzoną następującą ilość surowców:

1. Materiał maksymalnie 1000 m
2. Ocieplacz nie więcej niż 350 m

I stąd wynikają kolejne ograniczenia, które zapisujemy następująco:

$$1,2x_1 + 1,2x_2 \leq 1000,$$

$$x_1 + 1,5x_2 \leq 350$$

Oznaczają one, że przy x_1 -tej produkcji płaszczy damskich i x_2 -tej produkcji płaszczy męskich ilość wykorzystanych surowców w postaci materiału i ocieplacza nie może przekroczyć odpowiednio 1000 metrów i 350 metrów.

Reasumując, ograniczenia przedstawiają się następująco:

Lp.	Nazwa ograniczenia	Ograniczenie
1.	Budżet	$161x_1 + 137x_2 \leq 50000$ zł
2.	Czas pracy	$3x_1 + 4x_2 \leq 1040$
3.	Materiał	$1,2x_1 + 1,2x_2 \leq 1000,$
4.	Ocieplacz	$x_1 + 1,5x_2 \leq 350$

Teraz mamy już wszystkie najważniejsze dane potrzebne do rozwiązania zadania.

3. Rozwiązanie zadania w postaci standardowej za pomocą narzędzia „solver”

Chcąc, aby solver poprawnie rozwiązał nasze zadanie musimy wprowadzić do arkusza kalkulacyjnego odpowiednie dane w odpowiedniej formie. Dany-
mi do wpisania są:

1. Funkcja celu: $F(x_1, x_2) = 189x_1 + 163x_2 \rightarrow \max$
2. Ograniczenia: $161x_1 + 137x_2 \leq 50000$
 $3x_1 + 4x_2 \leq 1040$
 $1,2x_1 + 1,2x_2 \leq 1000$
 $x_1 + 1,5x_2 \leq 350$
 $x_1, x_2 \geq 0$ (warunek nieujemności)

Zauważyć należy, iż wszystkie nasze ograniczenia mają formę nierówności. Jeżeli ograniczenia można zapisać jako $A\vec{x} \leq \vec{b}$ i $\vec{x} \geq 0$ oraz zadanie nasze

polega na znalezieniu maksimum (lub minimum – zależnie od umowy) funkcji celu $f = \vec{c}^T \cdot \vec{x} \rightarrow \max$ to mamy do czynienia z tzw. **postacią standardową** zagadnienia programowania liniowego. Nasze zadanie jest przedstawione właśnie w postaci standardowej, gdzie:

$$\text{macierz } A = \begin{bmatrix} 161 & 137 \\ 3 & 4 \\ 1,2 & 1,2 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix}, \quad \text{wektor } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{wektor } b = \begin{bmatrix} 50000 \\ 1040 \\ 1000 \\ 350 \end{bmatrix}, \quad \text{wektor } x = \begin{bmatrix} 189 \\ 163 \end{bmatrix}$$

Przy wprowadzaniu danych do Excela nazwiemy pewne obszary arkusza kalkulacyjnego, zgodnie z oznaczeniami w podanych powyżej wzorach.

		Maksymalny zysk	
Funkcja celu (f)		0	
		Płaszcz damskie (x1_)	Płaszcz męskie (x2_)
ilość sztuk [x]		0	0
zysk [c]		189	163
c * x		0	0
Macierz A:		161	137
		3	4
		1.2	1.2
		1	1.5
Ograniczenia:			
	Ax	<=	b
1. Budżet	0	<=	50000
2. Czas pracy	0	<=	1040
3. Materiał	0	<=	1000
4. Ocieplacz	0	<=	350

Rys. 46. Fragment arkusza kalkulacyjnego z wprowadzonymi danymi, gotowy do uruchomienia narzędzia Solver

Powyższy arkusz przedstawia wprowadzone dane przed uruchomieniem narzędzia solver. Poszczególne fragmenty arkusza zostały nazwane zgodnie z przedstawioną niżej terminologią. I tak:

- komórkę C3(zawierającą $\sum c_i x_i$ – czyli funkcję celu) nazwano f ,
- komórkę C6 nazwano $x1$ (co oznacza niewiadomą x_1),
- komórkę D6 nazwano $x2$ (co oznacza niewiadomą x_2),
- komórki C6:D6 nazwano x ,
- komórki C7:D7 nazwano c ,
- komórki C8:D8 nazwano cx ,
- komórki B18:B21 nazwano Ax ,
- komórki D18:D21 nazwano b
- komórki C10:D13 (zawierające macierz A) nazwano A ,

W odpowiednie komórki wpisano właściwe wartości, przy czym jako wartości początkowe zmiennych decyzyjnych przyjęto zera. Po takim przygotowaniu arkusza kalkulacyjnego można przystąpić do uruchomienia Solvera. Jest to opcja programu Excel wbudowana w menu Narzędzia. Uruchamiając solvera przywołujemy okno dialogowe umożliwiające zdefiniowanie obliczeń. Oczywiście przed uruchomieniem solvera ustawiamy się na komórce zawierającej funkcję celu, czyli C3.

Przy powyższym zorganizowaniu arkusza łatwo jest wypełnić wartości pól dialogowych w oknie solvera. Robimy to następująco:

- w komórkę celu wpisujemy po prostu f ,
- w komórki zmieniane wpisujemy x ,
- w warunki ograniczające wpisujemy $.$

Następnie zaznaczamy właściwe ustawienia przełączników (np. przełącznik Równa: na max) i po naciśnięciu Rozwiąż otrzymujemy okno z informacją, iż Solver znalazł wyniki. W dalszej kolejności należy zaznaczyć funkcję „przechowaj rozwiązanie” oraz wybrać raport wyników. Po wykonaniu tych czynności otrzymujemy rozwiązanie, które przedstawia rysunek 47 oraz Raport wyników przedstawiony przez rysunek 48.

		Maksymalny zysk	
Funkcja celu (f)		58827.7512	
		Płaszcz damskie (x1)	Płaszcz męskie (x2)
ilość sztuk [x]		258.8516746	60.76555024
zysk [c]		189	163
c * x		48922.96651	9904.784689
Macierz A:		161	137
		3	4
		1.2	1.2
		1	1.5
Ograniczenia:			
	Ax	<=	b
1. Budżet	50000	<=	50000
2. Czas pracy	1019.617225	<=	1040
3. Materiał	383.5406699	<=	400
4. Ocieplacz	350	<=	350

Rys. 47. Fragment arkusza kalkulacyjnego po rozwiązaniu zadania przez Solver

Microsoft Excel 9.0 Raport wyników

Arkusz: [Arkusz w C: Moje dokumenty Studia Informatyka III-ci
semestr Badania Operacyjne Projekt z badań operacyjnych-
Raport utworzony: 03-02-11 18:56:32

Komórka celu (max)

Komórka	Nazwa	Wartość pocz.	Wart. końcowa
\$C\$5	f	0	58827.7512

Komórki decyzyjne

Komórka	Nazwa	Wartość pocz.	Wart. końcowa
\$C\$10	x1	0	258.8516746
\$D\$10	x2	0	60.76555024

Warunki ograniczające

Komórka	Nazwa	Wart. komórki	formuła	Status	Luz
\$B\$26	Budżet	50000	\$B\$26<=\$D\$26	Wiążące	0
\$B\$27	Czas pracy	1019.617225	\$B\$27<=\$D\$27	Nie wiążące	20.38
\$B\$28	Materiał	383.5406699	\$B\$28<=\$D\$28	Nie wiążące	616.5
\$B\$29	Ocieplacz	350	\$B\$29<=\$D\$29	Wiążące	0

Rys. 48. Raport wyników

Interpretując powyższe wyniki możemy stwierdzić, iż przedsiębiorstwo, dla osiągnięcia maksymalnego zysku, który przy podanych ograniczeniach wynosi około 58 827 zł powinno wyprodukować 258,88 sztuk płaszczy dam-

skich oraz 60,76 sztuk płaszczy męskich. Otrzymany wynik należy oczywiście przybliżyć do liczb całkowitych tak, aby spełnione były ograniczenia i wartość funkcji była maksymalna. Okazuje się, że takie liczby to 260 i 59. Zatem jeśli zakład będzie produkował 260 sztuk płaszczy damskich i 59 sztuk płaszczy męskich to osiągnie maksymalny zysk w wysokości 58 757 zł. Głównymi ograniczeniami, które wyznaczają te ilości są: budżet i ocieplacz – są one wiążące (są zasobami ostatecznie wykorzystanymi). Natomiast ograniczenia: materiał i czas pracy nie są wiążące (zasoby te nie są do końca wykorzystane), czyli na dobrą sprawę nie stanowią na razie żadnego ograniczenia. Jednak po wykorzystaniu tzw. luzu, który został obliczony dla każdego z ograniczeń, ograniczenia nie wiążące staną się ograniczeniami wiążącymi. Jeśli weźmiemy pod uwagę np. czas pracy, to okazuje się, że przedsiębiorstwo po wyprodukowaniu obliczonych ilości wyrobów ma jeszcze do wykorzystania 20 roboczogodzin. Aby zagospodarować ten czas firma powinna zwiększyć budżet lub dokupić ocieplacz, ponieważ te zasoby się skończyły (brak luzu).

4. Przedstawienie rozwiązania zadania metodą graficzną

W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy rozwiązanie naszego zadania w programie Excel (co było celem naszego projektu). Teraz chcieliśmy rozwiązać nasze zadanie także metodą graficzną. W tym celu przypomnijmy model matematyczny sformułowanego zadania:

$$F(x_1, x_2) = 189x_1 + 163x_2 \rightarrow \max$$

$$161x_1 + 137x_2 \leq 50000 \quad (1)$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1040 \quad (2)$$

$$1,2x_1 + 1,2x_2 \leq 1000 \quad (3)$$

$$x_1 + 1,5x_2 \leq 350 \quad (4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

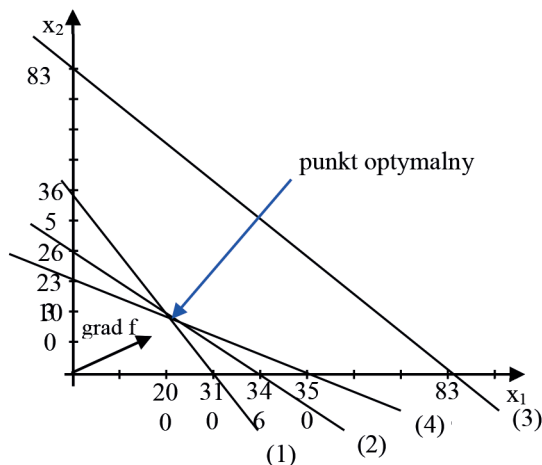
Do przedstawienia rozwiązania zadania w formie graficznej potrzebne będzie także obliczenie gradientu funkcji celu, czyli kierunku najszybszego

wzrostu funkcji określonego wzorem $\text{grad } f = \begin{bmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{bmatrix}$.

$$\text{Otrzymujemy zatem: } \text{grad } f = \begin{bmatrix} 189 \\ 163 \end{bmatrix}.$$

Teraz, kiedy mamy już wszystkie dane należy naszkicować w układzie współrzędnych wszystkie ograniczenia i w ten sposób określić obszar rozwią-

zań dopuszczalnych oraz za pomocą gradientu funkcji f odnaleźć w nim rozwiązanie zadania, czyli punkt optymalny.



Rys. 49. Proste ograniczeń wraz z punktem optymalnym

Z powyższego wykresu odczytujemy współrzędne punktu optymalnego poprzez rozwiązanie układu równań tworzonego przez ograniczenia (1) i (4), czyli przez budżet i ocieplacz.

Po wykonaniu tych czynności otrzymujemy takie samo rozwiązanie, jakie wyliczyło nam narzędzie solver. Jednak, aby uzyskać rozwiązanie metodą graficzną musieliśmy się dużo więcej napracować. Należy również podkreślić, że rozwiązanie takiego przykładu jest bez pomocy komputera dość niedokładne.

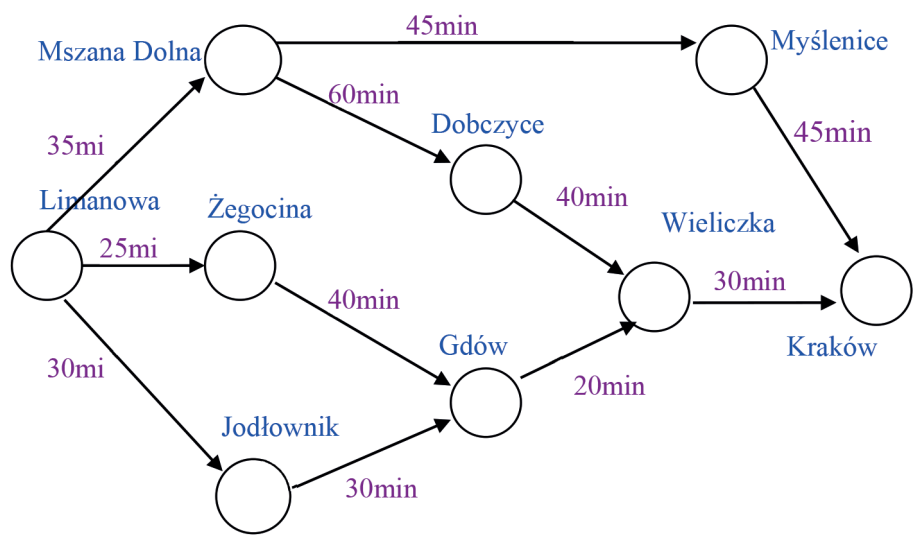
10.3. Programowanie sieciowe

1. Cel projektu.

1.1 Sformułowanie problemu.

Celem tego projektu jest znalezienie najkrótszego i najdłuższego czasu przejazdu z Limanowej do Krakowa. Poniższy graf przedstawia ogólny zarys dróg dojazdowych z zaznaczonymi czasami przejazdu pomiędzy poszczególnymi miejscowościami.

Podróż zaczynamy w węźle 1 (Limanowa) a kończymy w węźle 9 (Kraków).
Czas dojazdu z węzła 1 do węzła 9 jest różny w zależności od wyboru miejscowości, przez którą zamierzamy przejechać.



Rys. 50. Graf przedstawiający główne drogi dojazdowe z Limanowej do Krakowa

Czasy widniejące w tabeli 1 są rzeczywistymi czasami przejazdu pomiędzy miejscowościami.

Symbole drogi	Drogi dojazdowe do Krakowa	Czas przejazdu
A	1 - 2	35 min
B	1 - 3	25 min
C	1 - 4	30 min
D	2 - 5	60 min
E	2 - 7	45 min
F	3 - 6	40 min
G	4 - 6	30 min
H	5 - 8	40 min
I	6 - 8	20 min
J	7 - 9	45 min
K	8 - 9	30 min

1.2. Metoda Forda.

Istniejącym algorytmem umożliwiającym znalezienie najkrótszego bądź najdłuższego czasu przejazdu pomiędzy miejscowościami jest algorytm Forda, który polega na cechowaniu węzłów.

Każdy węzeł składa się z pary liczb a i b , gdzie:

- a – oznacza czas przejazdu;
- b – oznacza numer poprzedniego węzła, z którego wychodzi łuk.

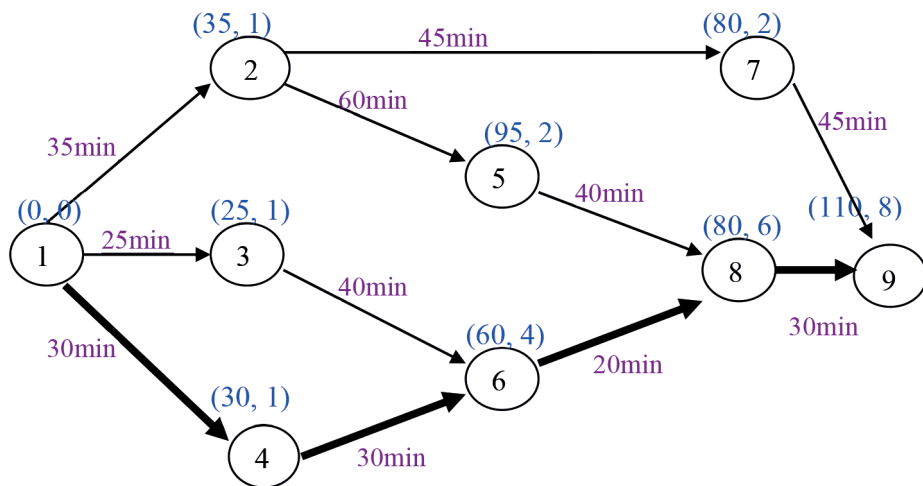
Węzłowi początkowemu przypisuje się cechę $(0,0)$.

Do każdej następnej cechy w danym węźle dodaje się czas przejazdu oraz numer poprzedniego węzła. Stosując tę metodę dochodzimy do węzła ostatniego, w tym przypadku do węzła 9, czyli Krakowa.

a) obliczenie najkrótszego czasu przejazdu

Dzięki tej metodzie możemy obliczyć najkrótszy czas przejazdu z Limanowej do Krakowa. Po dokonaniu obliczeń najkrótszy czas przejazdu biegnie z Limanowej przez Jodłownik, Gdów i Wieliczkę.

Metoda Forda zilustrowana jest na poniższym grafie (pogrubione strzałki przedstawiają najkrótszy czas przejazdu).

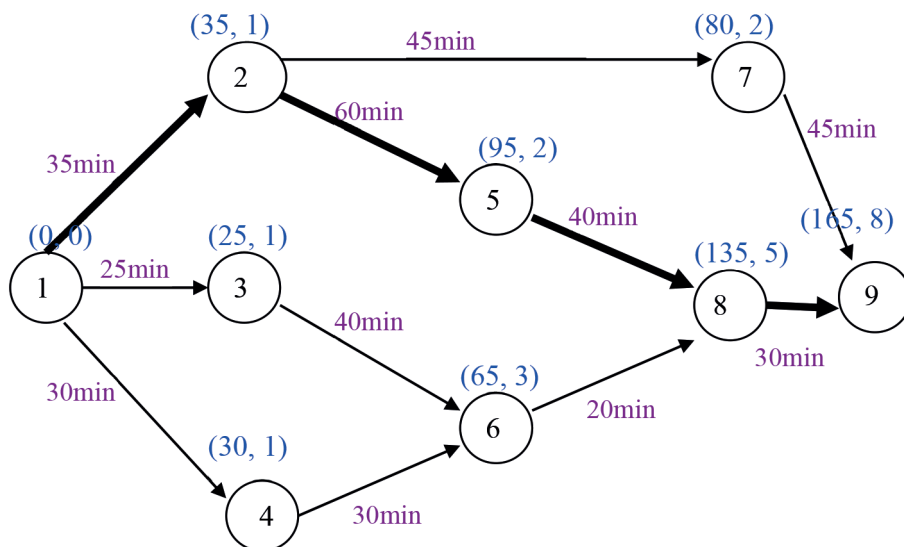


Rys. 51. Graf przedstawiający najkrótszy czas przejazdu z Limanowej do Krakowa (metoda Forda)

b) obliczenie najdłuższego czasu przejazdu

Stosując metodę Forda możemy również obliczyć najdłuższy czas przejazdu z Limanowej do Krakowa. W tym przypadku będzie ona z Limanowej przez Mszanę Dolną, Dobczyce i Wieliczkę.

Drogę tę przedstawia poniższy graf (pogrubione strzałki przedstawiają najdłuższy czas przejazdu).



Rys. 52. Graf przedstawiający najdłuższy czas przejazdu z Limanowej do Krakowa (metoda Forda)

1.3. Interpretacja

Dzięki temu zadaniu możemy również obliczać inne czasy przejazdu. Istnieją różne kryteria, np.: jadąc do Krakowa musimy przejechać przez daną miejscowość. Musimy wówczas obliczyć ile zajmie nam to czasu.

Do danego grafu (rys. 41.) możemy dorysować inne, mniej ważne drogi. Stworzona dzięki temu sieć pozwoli np.: firmie transportowej określić najbardziej optymalną drogę, dzięki której zaoszczędzi ona czas i pieniądze oraz szybciej dostarczy towar do odbiorców.

2. Model matematyczny

2.1. Wyznaczenie macierzy połączeń

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$1 \rightarrow$ droga wychodzi z węzła

$-1 \rightarrow$ droga wchodzi do węzła

a) zapis w postaci macierzowej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Niech: d_{ij} – wektor odległości między węzłami (miejscowościami) w minutach

x_{ij} – zmienne decyzyjne

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy pójdziemy trasą z } i \text{ do } j \\ 0, & \text{gdy nie pójdziemy trasą z } i \text{ do } j \end{cases}$$

b) zapis w postaci tabelarycznej

Węzły	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{25}	x_{27}	x_{36}	x_{46}	x_{58}	x_{68}	x_{79}	x_{89}
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0
7	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
d_{ij}	35	25	30	60	45	40	30	40	20	45	30

Wzór funkcji – matematyczny zapis odległości mierzonej czasem przejazdu.

$$f = 35x_{12} + 25x_{13} + 30x_{14} + 60x_{25} + 45x_{27} + 40x_{36} + 30x_{46} + 40x_{58} + 20x_{68} + 45x_{79} + 30x_{89}$$

Ograniczenia do zadania:

$$\begin{aligned}
 \text{Węzeł 1} & \quad x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
 \text{Węzeł 2} & \quad -x_{12} + x_{25} + x_{27} = 0 \\
 \text{Węzeł 3} & \quad -x_{13} + x_{36} = 0 \\
 \text{Węzeł 4} & \quad -x_{14} + x_{46} = 0 \\
 \text{Węzeł 5} & \quad -x_{25} + x_{58} = 0 \\
 \text{Węzeł 6} & \quad -x_{36} - x_{46} + x_{68} = 0 \\
 \text{Węzeł 7} & \quad -x_{27} + x_{79} = 0 \\
 \text{Węzeł 8} & \quad -x_{58} - x_{68} + x_{89} = 0 \\
 \text{Węzeł 9} & \quad -x_{79} - x_{89} = -1
 \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie zadania

3.1 Rozwiązanie zadania za pomocą Solvera w programie Microsoft Excel

a) obliczenie najkrótszego czasu przejazdu

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x12	0				Ax	B	
2	x13	0		węzeł1	1		1	
3	x14	1		węzeł2	0	0	0	
4	x25	0		węzeł3	0	0	0	
5	x27	0		węzeł4	0	0	0	
6	x36	0		węzeł5	0	0	0	
7	x46	1		węzeł6	0	0	0	
8	x58	0		węzeł7	0	0	0	
9	x68	1		węzeł8	0	0	0	
10	x79	0		węzeł9	-1	-1		
11	x89	1						
12	f	110						

The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

- Ustaw cel:** \$B\$12
- Na:** ☐ Maks ☒ Min ☐ Wartość: 0
- Przez zmienianie komórek zmiennych:** \$B\$1:\$B\$11
- Podlegających ograniczeniom:**
 - \$B\$1:\$B\$11 = binarna
 - \$F\$2:\$F\$10 = \$H\$2:\$H\$10
- ☒ Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń
- Wybierz metodę rozwiązywania:** Nieliniowa GRG
- Metoda rozwiązywania:** W przypadku gładkich nieliniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat nieliniowy GRG. Dla liniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat LP simpleks, natomiast w przypadku problemów, które nie są gładkie, wybierz aparat ewolucyjny.

Buttons: Dodaj, Zmień, Usuń, Resetuj wszystkie, Załaduj/zapisz, Pomoc, Rozwiąż, Zamknij.

Rys. 53. Zrzut ekranu po uzupełnieniu danych w programie solver

b) obliczenie najdłuższego czasu przejazdu

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x12	1				Ax	1	B
2	x13	0		węzeł1			0	1
3	x14	0		węzeł2			0	0
4	x25	1		węzeł3			0	0
5	x27	0		węzeł4			0	0
6	x36	0		węzeł5			0	0
7	x46	0		węzeł6			0	0
8	x58	1		węzeł7			0	0
9	x68	0		węzeł8			0	0
10	x79	0		węzeł9		-1	-1	
11	x89	1						
12	f	165						

The Solver dialog box is open, showing the following settings:

- Ustaw cel:** \$B\$12
- Na:** ☒ Maks ☐ Mjn ☐ Wartość
- Przez zmienianie komórek zmiennych:** \$B\$5:\$B\$11
- Podlegających ograniczeniom:**
 - \$B\$1:\$B\$11 = binarna
 - \$F\$2:\$F\$10 = \$H\$2:\$H\$10
- ☒ Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń
- Wybierz metodę rozwiązywania:** Nieliniowa GRG
- Metoda rozwiązywania:** W przypadku gładkich nieliniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat nieliniowy GRG. Dla liniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat LP simpleks, natomiast w przypadku problemów, które nie są gładkie, wybierz aparat ewolucyjny.

Rys. 54. Wyznaczanie najdłuższego czasu przejazdu z użyciem dodatku solver

3.2 Rozwiązanie zadania za pomocą programu lp_solve

- a) opis użycia programu lp_solve do wykonania projektu zadania z zadań operacyjnych

Opis programu

Program lp_solve został ściągnięty ze strony: <http://sal.kachinatech.com/B/3>. Ten program jest wolny od jakichkolwiek opłat, wolno go rozpowszechniać i/lub zmieniać zgodnie z postanowieniami GNU General Public License opublikowanymi przez Free Software Foundation, tak w wersji 2 Licencji, jak (do wyboru) w jakiegokolwiek późniejszej. Zobowiązuje ona do zachowania tych uwag w każdej ze sporządzonych kopii i/lub jakimkolwiek materiale pochodnym, przy którego powstawaniu ten materiał zostałby, choćby w części, użyty. Ten program jest rozpowszechniany z wiarą, że okaże się użyteczny, ale bez jakiegokolwiek gwarancji, bez nawet domyślnej gwarancji gotowości do dystrybucji lub przydatności do określonych potrzeb. Więcej szczegółów zawiera

GNU General Public License. Aby otrzymać kopię GNU General Public License należy napisać pod adres: Free Software Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA lub odwiedzić witrynę FSF w Internecie.

Platforma, wersja i instalacja programu

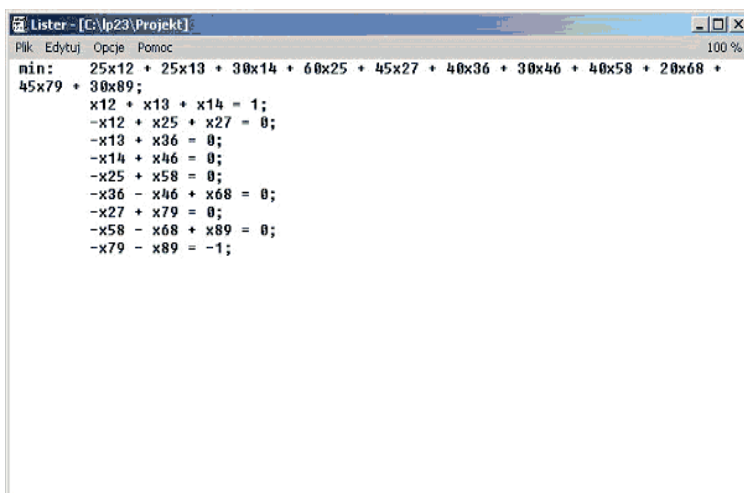
Platformy, na których działa program `lp_solve` to: UNIX, VMS, DOS, MS Windows. Dostępne są także kody źródłowe programu, dzięki czemu możliwe jest jego skompilowanie i uruchomienie na dowolnej platformie wyposażonej w kompilator języka ANSI C. Dla potrzeb niniejszego opracowania została użyta wersja 3.0 programu, przeznaczona dla platformy MS Windows. Programu nie trzeba instalować, jest on spakowany zipem, trzeba tylko rozpakować pliki do jakiegoś katalogu.

Korzystanie z programu i opis sposobu rozwiązania zadania

Działanie programu `lp_solve` polega na wczytaniu danych wejściowych (w postaci tekstowej), następnie ich przetworzeniu i zwróceniu wyników (również jako tekst). Dane najłatwiej jest podać do programu w formie pliku tekstowego, wyniki również najwygodniej zapisać do pliku.

Do przygotowania pliku z danymi oraz podglądu pliku wynikowego możemy użyć dowolnego najprostszego edytora tekstowego – np. skorzystać z edytora wbudowanego w program Windows Commander.

Żeby rozwiązać zadanie należy utworzyć nowy plik do edycji (w Windows Commanderze za pomocą kombinacji klawiszy Shift+F4), a następnie wpisać dane, które są podane w zadaniu. Przykład takiego pliku:



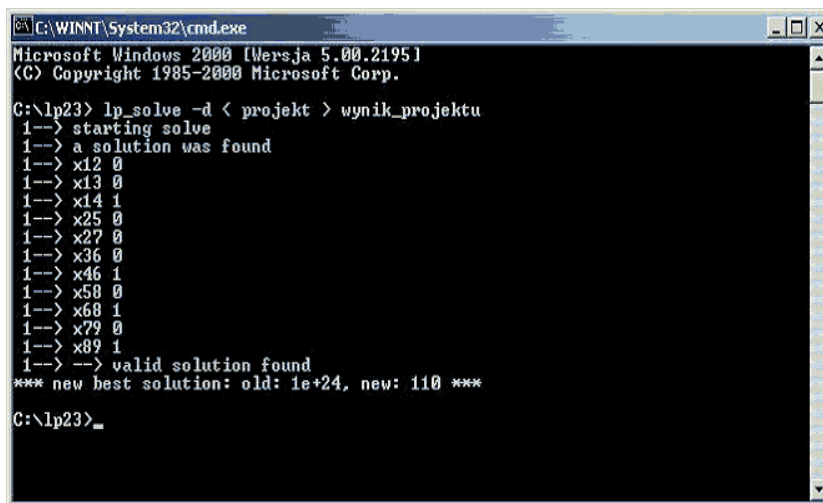
```

Lister - [C:\lp23\Projekt]
Plik  Edytuj  Opcje  Pomoc
min:  25x12 + 25x13 + 30x14 + 60x25 + 45x27 + 40x36 + 30x46 + 40x58 + 20x68 +
45x79 + 30x89;
      x12 + x13 + x14 = 1;
      -x12 + x25 + x27 = 0;
      -x13 + x36 = 0;
      -x14 + x46 = 0;
      -x25 + x58 = 0;
      -x36 - x46 + x68 = 0;
      -x27 + x79 = 0;
      -x58 - x68 + x89 = 0;
      -x79 - x89 = -1;
```

Rys. 55. Przygotowany plik tekstowy

Tak przygotowany plik trzeba zapisać, a następnie pozwolić rozwiązać lp_solve. Żeby to zrobić, należy otworzyć okienko DOSa, wejść do katalogu gdzie mamy program lp_solve (np. wpisać cd lp23) i wpisać komendę

lp_solve < nazwa_pliku_danych > nazwa_pliku_wyników
(np.: lp_solve < projekt > wynik_projektu).

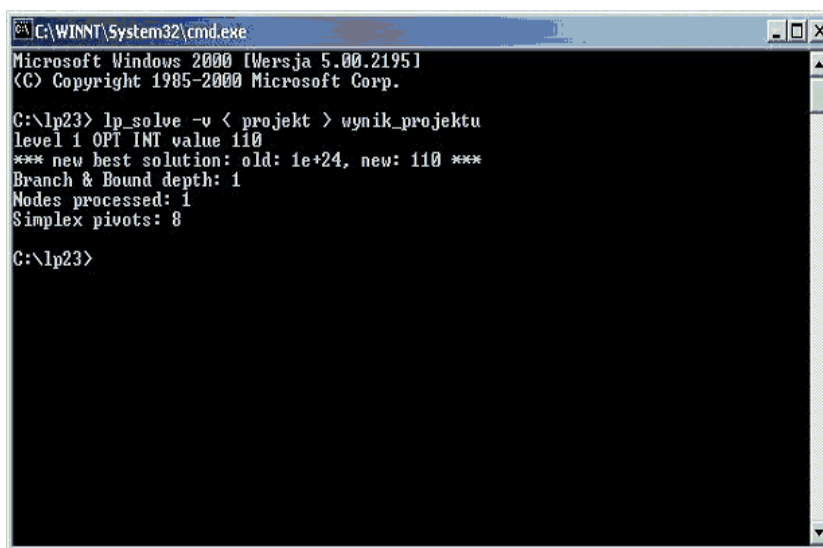


```
C:\WINNT\System32\cmd.exe
Microsoft Windows 2000 [Wersja 5.00.2195]
(C) Copyright 1985-2000 Microsoft Corp.

C:\lp23> lp_solve -d < projekt > wynik_projektu
1--> starting solve
1--> a solution was found
1--> x12 0
1--> x13 0
1--> x14 1
1--> x25 0
1--> x27 0
1--> x36 0
1--> x46 1
1--> x50 0
1--> x68 1
1--> x79 0
1--> x89 1
1--> --> valid solution found
*** new best solution: old: 1e+24, new: 110 ***

C:\lp23>_
```

Rys. 56. Uruchomienie programu lp_solve z użyciem atrybutu -d



```
C:\WINNT\System32\cmd.exe
Microsoft Windows 2000 [Wersja 5.00.2195]
(C) Copyright 1985-2000 Microsoft Corp.

C:\lp23> lp_solve -v < projekt > wynik_projektu
level 1 OPT INT value 110
*** new best solution: old: 1e+24, new: 110 ***
Branch & Bound depth: 1
Nodes processed: 1
Simplex pivots: 8

C:\lp23>
```

Rys. 57. Uruchomienie programu lp_solve z użyciem atrybutu -v

Następnie w Windows Commanderze podglądamy nasz wynik wciskając klawisz F3 na pliku z wynikiem (wynik_projektu). Plik wynikowy stworzony dla powyższych przykładowych danych wejściowych jest dołączony do opisu jako załącznik.

Podsumowanie

Za pomocą programu lp_solve został wykonany projekt zadania z badań operacyjnych o nazwie projekt i rozwiązanie w pliku pod nazwą wynik_projektu.

b) dane wejściowe

$$\min: 35x_{12} + 25x_{13} + 30x_{14} + 60x_{25} + 45x_{27} + 40x_{36} + 30x_{46} + 40x_{58} + 20x_{68} + 45x_{79} + 30x_{89}$$

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$-x_{12} + x_{25} + x_{27} = 0$$

$$-x_{13} + x_{36} = 0$$

$$-x_{14} + x_{46} = 0$$

$$-x_{25} + x_{58} = 0$$

$$-x_{36} - x_{46} + x_{68} = 0$$

$$-x_{27} + x_{79} = 0$$

$$-x_{58} - x_{68} + x_{89} = 0$$

$$-x_{79} - x_{89} = -1$$

c) rozwiązanie (dane wyjściowe)

*****Data read*****

Rows:	9	<i>Ilość wierszy w macierzy incydencji</i>
Columns:	11	<i>Ilość kolumn w macierzy incydencji</i>
Nonnuls:	33	<i>Ilość pozycji bez zera</i>
NAME	LPPROB	

ROWS	Numery wierszy w macierzy
incydencji	
N r_0	
E r_1	
E r_2	
E r_3	
E r_4	
E r_5	
E r_6	
E r_7	
E r_8	
E r_9	

COLUMNS Oznaczenia kolumn w macierzy incydencji oraz ich wartości

x12	r_2	-1
x12	r_1	1
x12	r_0	35
x13	r_3	-1
x13	r_1	1
x13	r_0	25
x14	r_4	-1
x14	r_1	1
x14	r_0	30
x25	r_5	-1
x25	r_2	1
x25	r_0	60
x27	r_7	-1
x27	r_2	1
x27	r_0	45
x36	r_6	-1
x36	r_3	1
x36	r_0	40
x46	r_6	-1
x46	r_4	1
x46	r_0	30
x58	r_8	-1
x58	r_5	1
x58	r_0	40
x68	r_8	-1
x68	r_6	1

x68	r_0	20
x79	r_9	-1
x79	r_7	1
x79	r_0	45
x89	r_9	-1
x89	r_8	1
x89	r_0	30

RHS

RHS	r_0	0
RHS	r_1	1
RHS	r_2	0
RHS	r_3	0
RHS	r_4	0
RHS	r_5	0
RHS	r_6	0
RHS	r_7	0
RHS	r_8	0
RHS	r_9	-1



Droga zewnętrzna wchodzi do grafu

Dla węzłów pośrednich zero

Droga zewnętrzna wychodzi z grafu

RANGES

Zakres

$$f = 35x_{12} + 25x_{13} + 30x_{14} + 60x_{25} + 45x_{27} + 40x_{36} + 30x_{46} + 40x_{58} + 20x_{68} + 45x_{79} + 30x_{89}$$

BOUNDS

Ograniczenia

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$-x_{12} + x_{25} + x_{27} = 0$$

$$-x_{13} + x_{36} = 0$$

$$-x_{14} + x_{46} = 0$$

$$-x_{25} + x_{58} = 0$$

$$-x_{36} - x_{46} + x_{68} = 0$$

$$-x_{27} + x_{79} = 0$$

$$-x_{58} - x_{68} + x_{89} = 0$$

$$-x_{79} - x_{89} = -1$$

Macierz incydencji w postaci tabelarycznej
problem name: lp

	x12	x13	x14	x25	x27	x36	x46	x58	x68	x79	x89
Mini-	35	25	30	60	45	40	30	40	20	45	30
mize											
r_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	=1
r_2	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	=0
r_3	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	=0
r_4	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	=0
r_5	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	=0
r_6	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0	=0
r_7	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	=0
r_8	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	=0
r_9	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	=-1
Type	Real	Real	Real	Real	Real	Real	Real	Real	Real	Real	Real
Upbo	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.
Low-											
bo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Value of objective function: 110

Wartość minimalna funkcji

x12	0
x13	0
x14	1
x25	0
x27	0
x36	0
x46	1
x58	0
x68	1
x79	0
x89	1

Actual values of the constraints:*Aktualne wartości ograniczeń*

r_1	1
r_2	0
r_3	0
r_4	0
r_5	0
r_6	0
r_7	0
r_8	0
r_9	-1

Dual values:*Wartości dualne*

r_1	110
r_2	75
r_3	85
r_4	80
r_5	15
r_6	50
r_7	30
r_8	30
r_9	00

10.4. Analiza drogi krytycznej – metoda PERT**1. Cel projektu**

Celem projektu jest praktyczne zobrazowanie metody analizy drogi krytycznej – metody PERT⁷⁾.

Realizowane przez nas przedsięwzięcie to organizacja lekkoatletycznych zawodów rangi mistrzowskiej z międzynarodową obsadą. Zadanie, które stoi przed nami to znalezienie harmonogramu, co pozwoliłoby bez przeszkód przygotować całą imprezę oraz ustalenie czasu, który jest nam potrzebny do przygotowania i zrealizowania całego przedsięwzięcia.

2. Sformułowanie modelu, zebranie danych

Jak już wiadomo przedsięwzięciem przez nas realizowanym jest organizacja lekkoatletycznych zawodów rangi mistrzowskiej z międzynarodową ob-

⁷⁾ Program Evaluation and Review Technique

sadą. Poniższa tabela zawiera listę czynności niezbędnych do przygotowania i zrealizowania zawodów oraz zestawienia odpowiadających im czasów. Przy czym przez t_1 – należy rozumieć czas optymistyczny, t_2 – pesymistyczny, t_0 – oczekiwany, natomiast T – to przeciętny czas oczekiwany obliczany wg wzoru

$$T = \frac{t_1 + 4t_0 + t_2}{6}.$$

Za podstawową jednostkę czasu przyjęto 1 tydzień.

Symbol Czynności	Nazwa czynności	T_1	t_2	t_0	T
A	Wybór komitetu organizacyjnego	0,5	1,5	1	1
B	Przygotowanie obiektu	10	16	12	12,5
C	Kampania reklamowa	4	8	6	7
D	Rozprowadzenie biletów	4	8	6	7
E	Opracowanie i prezentacja oficjalnego logo imprezy	2	4	3	3,5
F	Porozumienie w sprawie zakwaterowania ekip	2	6	4	5
G	Opracowanie planu zakwaterowania i przygotowanie na przyjęcie ekip	2	4	3	3,5
H	Przygotowanie do obsługi wyjazdu uczestników	2	4	3	3,5
I	Przygotowanie ceremonii zakończenia imprezy	1	3	2	2,5
J	Przyjazd kibiców	1	3	2	2,5
K	Przyjazd i powitanie ekip oraz dziennikarzy	1,5	3,5	2,5	3
L	Przyjazd i powitanie gości oficjalnych	0,5	1,5	1	1,25
M	Obsługa rozpoczęcia zawodów	0,15	0,15	0,15	0,15
N	Obsługa obiektów w czasie trwania zawodów	2	2	2	2
O	Obsługa zakończenia imprezy	0,15	0,15	0,15	0,15

Po sporządzeniu listy czynności należy przystąpić do ustalenia związków między nimi. Chodzi o ustalenie, jak kolejne działania winny po sobie następować.

Całość została ujęta w tabeli 3. Przy czym kolumna przedostatnia zawiera czynności, które są bezwzględnymi, bezpośrednimi poprzednikami tych z kolumny ostatniej (czynność 0 oznacza czynność inicjującą).

poprz.	poprz.	poprz.	poprz.	poprz.	poprz.	poprz.	poprz.	poprz.	poprz.
-	-	-	-	-	-	-	-	0	A
-	-	-	-	-	-	-	0	A	B
-	-	-	-	-	-	0	A	B	C
-	-	-	-	-	-	0	A	B	D
-	-	-	-	-	-	0	A	B	E
-	-	-	-	-	-	0	A	B	F
-	-	-	-	-	0	A	B	F	G
-	-	-	-	-	0	A	B	F	H
-	-	-	-	-	0	A	B	F	I
-	-	-	-	-	0	A	B	ECD	J
-	-	-	-	0	A	B	F	G	K
-	-	-	-	0	A	B	F	G	L
-	-	-	0	0A	AB	BF	ECDG	JKL	M
-	-	0	0A	AB	BF	ECDG	JKL	M	N
-	0	0A	0AB	ABF	BEC-DG	BJKL	FM	HIN	O

Pierwotna lista węzłów:

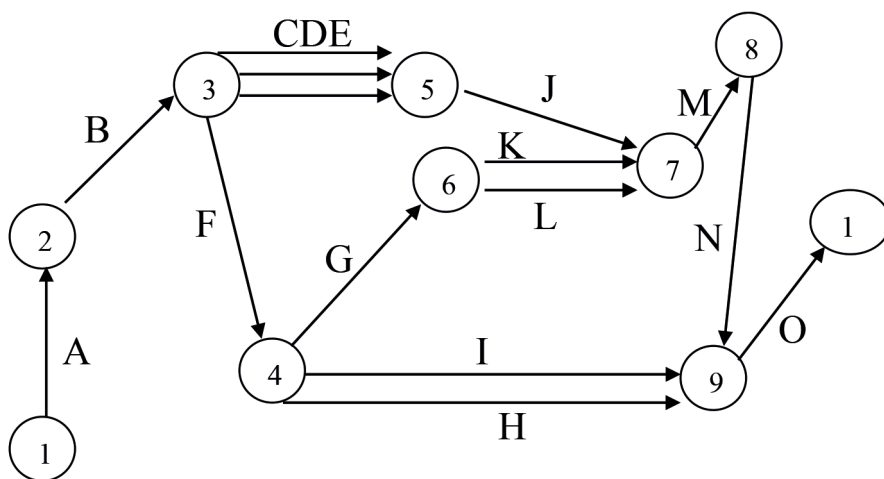
$(0 | A)$, $(A | B)$, $(B | C)$, $(B | D)$, $(B | E)$, $(B | F)$, $(F | G)$, $(F | H)$, $(F | I)$, $(ECD | I)$, $(G | K)$, $(G | L)$, $(JKL | M)$, $(M | N)$

Po uważnym spojrzeniu na listę okazuje się, że należy dokonać redukcji węzłów zgodnie ze wskazaniem dotyczącym metody PERT. Ostatecznie lista wygląda następująco:

1. $(0 | A)$
2. $(A | B)$
3. $(B | CDEF)$
4. $(F | GHI)$
5. $(ECD | J)$
6. $(G | KL)$
7. $(JKL | M)$
8. $(M | N)$
9. $(HIN | O)$.

3. Konstrukcja sieci czynności:

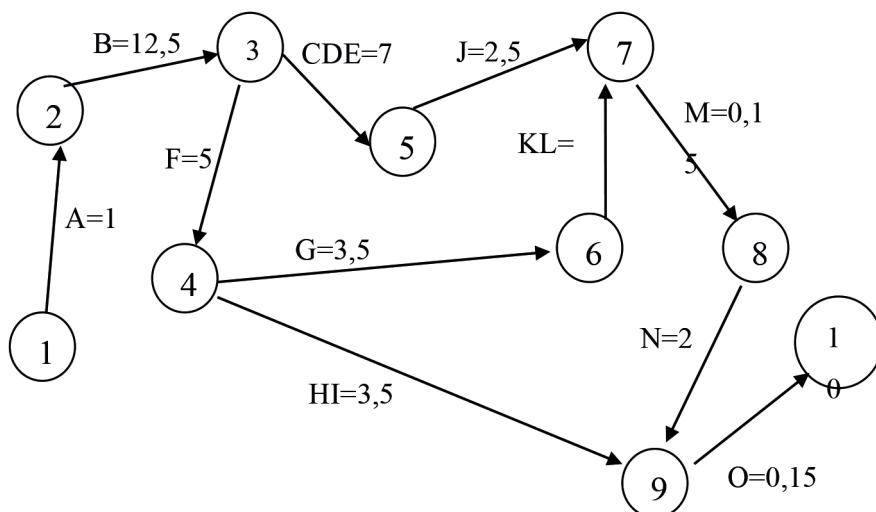
Dysponując teraz pełną, ostateczną listą węzłów możemy przystąpić do naszkicowania sieci:



Rys. 58. Sieć zależności przy organizacji zawodów lekkoatletycznych

Jak widać na powyższym grafie węzły 3 i 5, 6 i 7 oraz 4 i 9 są połączone więcej niż jednym łukiem. Oznacza to, że czynności E, C i D stanowią jedną czynność ECD, czynności K i L jedną czynność, KL oraz czynności H i I jedną czynność HI. Jako czas czynności po połączeniu przyjmujemy czas tej, która w założeniu pierwotnym miała trwać dłużej.

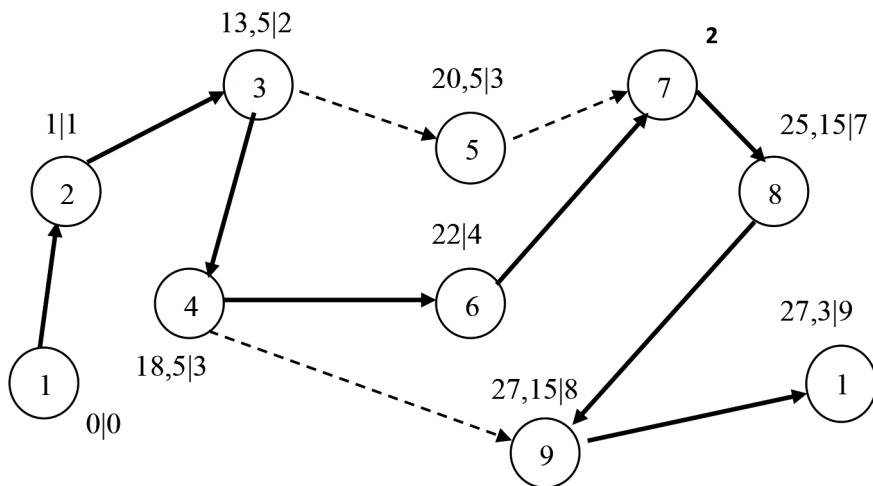
Ostateczna sieć czynności wygląda następująco:



Rys. 59. Ostateczna sieć czynności

4. Poszukiwanie drogi krytycznej

Ponieważ minimalny czas niezbędny do realizacji przedsięwzięcia nie może być krótszy niż najdłuższa z dróg łączących węzły 1 i 10, przystępujemy do jej wyznaczenia metodą Forda (na rys. 60. zaznaczono ją pogrubioną linią).



Rys. 60. Sieć zależności czynności z zaznaczeniem drogi krytycznej

Po oszacowaniu widać, że droga krytyczna dla naszego przedsięwzięcia wynosi 27,3 tygodnie. Wszystkie czynności, które leżą na ścieżce krytycznej nazywają się czynnościami krytycznymi. Widać, że analizowane przez nas przedsięwzięcie posiada tylko trzy czynności niekrytyczne: *CDE*, *KL* i *HI*. Oznacza to, że w pewnych granicach czasowych można opóźnić ich wykonanie nie narażając na opóźnienie całego przedsięwzięcia. Nie można natomiast w żadnym wypadku opóźnić czynności krytycznych, jeśli chcemy całość przedsięwzięcia wykonać w terminie.

5. Analiza czasowa

Analizując graf przy poszukiwaniu drogi krytycznej można również zdobyć informacje o luzach czasowych i zapasach czasu. Są to istotne wiadomości, bowiem dzięki nim możemy się dowiedzieć, w którym miejscu ewentualnie może nastąpić opóźnienie nie narażające całego przedsięwzięcia na niezrealizowanie w terminie. Luz czasowy możemy obliczyć ze wzoru:

$$T_i = T - t'_i - t_i$$

T – długość drogi krytycznej,

t_i – najwcześniejszy czas dojścia do węzła i ,

t'_i – długość drogi krytycznej od węzła i do węzła końcowego.

Dla każdego węzła leżącego na drodze krytycznej luz czasowy wynosi zero. W naszym przypadku tylko jeden węzeł znajduje się poza nią: węzeł 5. Dla niego:

$$\begin{aligned} i &= 5 \\ t_5 &= 20,5 \\ t'_5 &= 4,8 \end{aligned}$$

Droga krytyczna (T) naszego przedsięwzięcia wynosi 27,3. Stąd luz czasowy to:

$$T_5 = 27,5 - 4,8 - 20,5 = 2$$

Planowane przez nas przedsięwzięcie ma trzy czynności niekrytyczne. Są to: *CDE*, *J* i *HI*. Tylko one mogą być opóźnione w pewnych granicach bez opóźniania całości. Jak duże może być to opóźnienie można sprawdzić przez policzenie zapasów czasu odpowiednich dla każdej czynności. Zapas czasu czynności łączącej węzły i z j obliczamy ze wzoru:

$$t_{ij} = T - t'_j - t_i - d_{ij}$$

T – droga krytyczna całego przedsięwzięcia = 27,3,

t'_j – droga krytyczna od węzła j do końca,

t_i – najwcześniejszy czas dojścia do węzła i ,

d_{ij} – czas wykonania danej czynności.

Dla czynności *CDE* (węzły 3 – 5):

$$\begin{aligned} t_3 &= 13,5 \\ t'_5 &= 4,8 \\ d_{CDE} &= 7 \\ t_{CDE} &= 2 \end{aligned}$$

Luz czasowy dla czynności *CDE* wynosi 2.

Dla czynności J (węzły 5 – 7):

$$t_5 = 20,5$$

$$t_7' = 2,3$$

$$d_J = 2,5$$

$$t_J = 2$$

Luz czasowy dla czynności J wynosi 2.

Dla czynności HI (węzły 4 – 9):

$$t_4 = 18,5$$

$$t_9' = 0,15$$

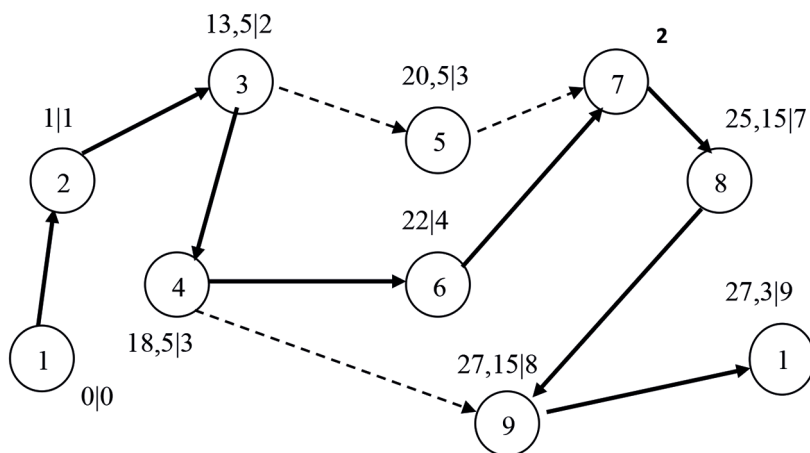
$$d_{HI} = 3,5$$

$$t_{HI} = 5,15$$

Luz czasowy dla czynności HI wynosi 5,15.

6. Wykres Gantta

Wykres Gantta dla rozpatrywanego przez nas przedsięwzięcia przedstawiony jest na rysunku 61.



Rys. 61. Wykres Gantta dla czynności występujących przy organizacji zawodów lekkoatletycznych

Zaprezentowany na rys. 61 wykres Gantta przedstawia optymalny harmonogram pracy tj. organizacji lekkoatletycznych zawodów rangi mistrzowskiej z międzynarodową obsadą. Wyraźnie widać, że dla rozpatrywanego przedsięwzięcia czynnościami niekrytycznymi są: CDE , J oraz HI . Oznacza to, że

zadania takie jak: kampania reklamowa, rozprowadzenie biletów, opracowanie i prezentacja oficjalnego logo imprezy, przygotowanie do obsługi wyjazdu uczestników i ceremonii zakończenia imprezy oraz przyjazd kibiców można wykonywać równolegle z czynnościami krytycznymi.

BIBLIOGRAFIA

1. Anderson D.R. , Sweeney D.J., Williams T.A. i in., „*An Introduction to Management Science. Quantitative Approach to Decision Making*”, South Western Educational Publishing, 2007
2. Boltyanski V., Martini H., Soltan V., „*Geometric Methods and Optimization Problems*”, Springer Science+Business Media, B.V., 1999
3. Buga J., Nykowski I., „*Zagadnienie transportowe w programowaniu liniowym*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1974
4. Duffin R.J., Peterson E.L., Zener C. Gaometric, „*Programming-Theory and Application*”, John Wiley & Sons, New York 1967
5. Gale D., „*Teoria liniowych modeli ekonomicznych*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1969
6. Garfinkel R.S., Naemhauser G.L., „*Programowanie całkowitoliczbowe*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1978
7. Gass S. I., „*Programowanie liniowe*”, Wydawnictwo Naukowe – Techniczne, Warszawa 1976
8. Grabowski W., „*Programowanie matematyczne*”, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1982
9. Gruszczyński M., Kuszewski T, Podgórska M., „*Ekonometria i badania operacyjne. Podręcznik dla studiów licencjackich*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009
10. Gurgul H., Suder M., „*Matematyka dla kierunków ekonomicznych*”, Wydawnictwo Oficyna Wolters Kluwer Business, Warszawa 2012
11. Hillier F, Lieberman G., „*Introduction to Operations Research*”, McGraw-Hill Education, 2021
12. Hu T.C., „*Integer Programming and Network Flows*”, Menlo Park, Addison-Wesley PC, 1970
13. Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A., „*Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2021
14. Kalichman I.L., „*Algebra liniowa i programowanie*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1971
15. Kalichman I.L., „*Zadania z algebry liniowej i programowania liniowego*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1974
16. Kopańska - Bródka D., „*Metody stochastycznego programowania liniowego i ich praktyczne zastosowanie w badaniach ekonomicznych*”, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 1991
17. Korbut A., Finkelsztejn J.J., „*Programowanie dyskretne*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1974

18. Krysicki W. Włodarski L., „*Analiza matematyczna w zadaniach*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2021
19. Leja F., „*Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2021
20. Meditch J.S., „*Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*”, Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa 1975
21. Muller Y., „*Wprowadzenie do nauki organizacji i badań operacyjnych*”, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1971
22. Ostrowski A., „*Niepewność i nieprecyzyjność w sytuacjach decyzyjnych na przykładzie procesów inwestycyjnych*”, Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole 2002
23. Smoluk A., „*O zasadzie dualności w programowaniu liniowym*”, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 79, Wrocław 2009
24. Szapito T. (red), „*Decyzje menedżerskie z Excelem*”, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2000
25. Sysło M.M., Deo N., Kowalik J.S., „*Algorytmy optymalizacji dyskretnej*”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995
26. Trzaskalik T., „*Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*”, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2008
27. Wala K., Kieljan (Malik) G., „*Model kombinatoryczny uogólnionego problemu komiwojażera z pobieraniem i dostarczaniem towaru, Zastosowania Teorii Systemów*”, Problemy Inżynierii Mechanicznej i Robotyki - Monografie nr 3, WiMiR AGH Kraków 2005, s. 143-148
28. Wagner H.M., „*Principles of Operations Research*”, Prentice Hall, New Jersey 1969
29. Winston W.L., „*Operations Research, California*”, Duxbury Press, ITP, 1993
30. Wit R., „*Metody programowania nieliniowego*”, Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa 1986
31. Włodarski T., „*Algebra liniowa i programowanie liniowe: w zadaniach i zastosowaniach ekonomicznych*”, Oficyna Wydawnicza MA, Łódź 2011
32. Zangwill W.I., „*Programowanie nieliniowe*”, Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa 1974



ISBN 978-83-954664-1-0

